

EL TEOREMA DE LA IMPOSIBILIDAD DE ARROW: PRESENTACIÓN DIAGRAMÁTICA Y BREVES COMENTARIOS*

Alberto E. G. Müller**

1. Introducción

El teorema de la imposibilidad de Arrow (en adelante, TA) constituye un tópico clásico dentro de la economía neoclásica normativa, o Economía del Bienestar. Este sitio le corresponde por haber mostrado que, a partir de supuestos plausibles y de sentido común, que no es posible construir un mapa de elección social a partir de preferencias individuales acerca del conjunto social sin impedir que algún individuo imponga sus preferencias a los demás (esto es, que se constituya en dictador).

El objetivo de esta breve nota es doble. Por una parte, se presentará una exposición diagramática de la demostración del teorema, que se espera brinde una demostración más sencilla y aprehensible que la usualmente encontrada en libros de textoⁱ. En segundo lugar, se desarrollarán algunas reflexiones acerca del alcance de las conclusiones del teorema.

Cabe destacar que el objetivo de esta nota es aportar una clarificación conceptual y expositiva acerca del tema tratado, sin pretender contribuciones originalesⁱⁱ.

2. Demostración diagramática

El TA parte de la definición de una regla de preferencia social construida a partir de las preferencias individuales sobre el conjunto social. Esto es, los diversos individuos expresan sus preferencias acerca de diferentes estados posibles de la sociedad, y la regla que manifiesta la preferencia del conjunto de la sociedad se define a partir de aquéllasⁱⁱⁱ.

La intención de fondo es definir un mapa de preferencias de características no dictatoriales, eso es, que no refleje imposición alguna por parte de algún individuo sobre los demás. En términos del propio Arrow (1994, pág. 15), “nos preguntamos si es formalmente posible construir un procedimiento para pasar de un conjunto de preferencias individuales conocidas a un modelo de formación de las decisiones sociales, satisfaciendo el procedimiento en cuestión ciertas condiciones naturales”. En tal sentido, la propuesta difiere claramente de la que sustenta el concepto de función de bienestar social a la Bergson-Samuelson; ésta última se funda explícitamente en juicios de valor independientes de las preferencias o juicios individuales acerca del conjunto social (y de hecho, esta función no contiene indicaciones acerca de cómo se forman tales juicios de valor). Este tipo de función es dictatorial, en el sentido de que impone un ordenamiento de preferencias sobre lo social que no se construye a partir de preferencias individuales.

2.1 Condiciones iniciales

Para la construcción de este mapa de preferencias sociales, se plantean cuatro condiciones, para un universo de por lo menos tres individuos y un número finito de situaciones posibles (ver notación en pie de página)^{iv}:

Primera condición: la ordenación social de los estados posibles debe ser asimétrica y negativamente transitiva; asimismo, dicha ordenación debe comprender el universo de juicios de preferencias de los individuos^v.

La relación de asimetría es fácilmente entendible, en base al principio de no contradicción. En cuanto a la transitividad negativa, ella puede expresarse de acuerdo a lo siguiente:

$$x \succ^* y$$

es negativamente transitiva si para z cualquiera, se dará una de las tres opciones siguientes:

$$(1) x \succ^* z$$

$$(2) z \succ^* y$$

$$(3) x \succ^* z \wedge z \succ^* y \text{ (ambas anteriores)}$$

Una forma más clara y sugerente de expresar lo anterior es indicar que deberá darse una de las situaciones siguientes (reiteramos el ordenamiento anterior):

$$(1') x \succ^* y \succ^* z$$

$$(2') z \succ^* x \succ^* y$$

$$(3') x \succ^* z \succ^* y$$

Esta condición puede expresarse verbalmente como el concepto de que toda situación posible debe ser comparable con las demás. De hecho, esto no ocurre con una regla basada únicamente en el usual criterio paretiano. Este afirma que el bienestar social aumenta cuando la utilidad de por lo menos un individuo aumenta y la de los restantes no disminuye (o viceversa: el bienestar social disminuye cuando decrece la utilidad de por lo menos un individuo y no se incrementa la de los restantes); por lo tanto, no permite comparar entre situaciones en las que simultáneamente el bienestar de algunos individuos aumenta y el de otros disminuye.

Segunda condición: la regla social debe seguir el principio paretiano.

Esta condición puede expresarse de la siguiente forma:

Si para todo i ,

$$x \succ_i y$$

entonces

$$x \succ^* y.$$

Un aspecto que se demostrará importante para más adelante es que de esta condición se deriva la siguiente, que podríamos denominar versión "revertida". Para que la regla social establezca

$$x \succ^* y,$$

por lo menos para un individuo tiene que cumplirse

$$x \succ_i y$$

En caso contrario (o sea, si $y \succ_i x$, para todo i) deberá ser necesariamente

$$y \succ^* x$$

O sea, para que una regla social establezca una relación de preferencia, **ella debe coincidir por lo menos con la preferencia de un individuo.**

Tercera condición: el juicio sobre cada par de alternativas es independiente de las alternativas restantes.

Esta condición permite el tratamiento de las opciones de a pares, pudiendo obviarse la consideración de las demás, lo que representa una evidente ventaja en términos operativos. Como se señala en Mas-Colell et al. (loc. cit.), este principio tiene además una razón de

orden teórico, y es que es razonable suponer que un juicio sobre cierto par de alternativas no debe depender de la existencia de cualquier otra opción. Podría argumentarse que la hipótesis de transitividad negativa (de ser válida la formulación propuesta en 1', 2', 3') contiene esta condición, puesto que la introducción de la opción z no altera la regla de preferencia entre x e y. Si así fuera, esta tercera condición sería redundante.

Cuarta condición: para ningún individuo se da que si $x >_i y$, entonces $x >^ y$, para todo par de opciones (x, y) .*

Habitualmente, se verbaliza esta condición afirmando que ningún individuo puede constituirse en dictador, en el sentido de que sus preferencias deben reflejarse necesariamente en la regla social.

2.2 Demostración

Como es sabido, la prueba de la imposibilidad del TA se realiza demostrando que las primeras tres condiciones son incompatibles con la cuarta.

En primer término, debemos introducir la noción de conjunto *decisivo* de individuos. Se trata de aquel subconjunto $D \subset I$ de individuos d cuyas preferencias con respecto a determinado par de alternativas (x, y) coincide con la regla social. Esto es, si $x >_d y$, entonces $x >^* y$, para todo $d \in D$.

Notemos un rasgo central de D , y es que no puede nunca ser un conjunto vacío, en función de la segunda condición (supuesto paretiano en la versión "revertida").

El paso siguiente consiste en desarrollar la hipótesis de transitividad, incorporando sucesivas opciones sobre las que la regla social debe expedirse, a partir de las condiciones indicadas. Ello es ilustrado en el diagrama adjunto.

Partimos de la regla social $x >^* y$. Por la hipótesis de transitividad, vimos que cuando se incorpora una tercera opción z, debe ocurrir alguna de las situaciones siguientes:

- (1') $x >^* y >^* z$
- (2') $z >^* x >^* y$
- (3') $x >^* z >^* y$

Seguidamente, la incorporación de la alternativa w agrega un término más a la sucesión de estados sobre los que debe manifestarse la regla social; se constituye de esta forma un árbol de casos posibles, indicado parcialmente en el cuadro. La secuencia de juicios acerca de estados posibles (que en el cuadro arriba hasta 4 estados, partiendo de la relación de preferencia $x >^* y$) permite identificar sucesivos conjuntos decisivos^{vi}. Dado que tales conjuntos, por la condición paretiana, no pueden ser vacíos, podemos verificar fácilmente que por lo menos un individuo debe satisfacer la condición de pertenecer al conjunto decisivo "multi-alternativas". En consecuencia, para este individuo todas las preferencias que el mismo expresa coincidirán con las establecidas por la regla social. De esta forma, la condición cuarta queda necesariamente no cumplida, y existe un dictador.

Opciones x,y

	Inclusión de z	Inclusión de w	
$x >^* y$	$x >^* y >^* z$	$w >^* x >^* y >^* z$	
		$x >^* w >^* y >^* z$	
		$x >^* y >^* w >^* z$	
		$x >^* y >^* z >^* w$	
	$x >^* z >^* y$		$w >^* x >^* z >^* y$
			$x >^* w >^* z >^* y$
			$x >^* z >^* w >^* y$
		$x >^* z >^* y >^* w$	
	$z >^* x >^* y$		$w >^* z >^* x >^* y$
			$z >^* w >^* x >^* y$
		$z >^* x >^* w >^* y$	
	$z >^* x >^* y >^* w$		

3. Comentarios

A continuación, se formulan algunos comentarios y observaciones.

(i) *Uno o varios dictadores*

Parece conveniente señalar que el "germen" de la conclusión del TA radica en realidad en uno de sus supuestos; más específicamente, en el que asume el criterio paretiano. Como vimos, en su versión "revertida", ella establece que la regla social debe coincidir con por lo menos la preferencia de un individuo.

El aporte específico - si se quiere - del TA consiste en mostrar que por lo menos para un individuo existe coincidencia entre *todas* sus preferencias y la regla social.

Ahora bien, dado que el conjunto de situaciones sobre las que cabe emitir juicio de preferencia es finito, el TA no permite asegurar que el individuo-dictador sea único. Esto es, en la medida en que haya más individuos que posibles combinaciones de preferencias, puede darse el caso de "múltiples dictadores" (de hecho, esto ocurriría también en el caso trivial en el que todos los individuos expresaran preferencias idénticas).

Notemos al respecto que las efectivas combinaciones posibles de opciones son bastante menores en número de lo que podría sugerir el diagrama presentado en el acápite anterior. A efectos de realizar un conteo adecuado de casos, puede recurrirse a una presentación matricial, que ofrece una visión más compacta (aunque menos clara). Para cuatro alternativas (x, y, z, w) sobre las que cabe un juicio de preferencia, los casos posibles pueden sintetizarse en el cuadro siguiente:

	x	y	z	w
x	-	>*	>*	>*
y	>*	-	>*	>*
z	>*	>*	-	>*
w	>*	>*	>*	-

Cada casillero interior del cuadro debe leerse como "la opción de la fila es preferible a la de la columna"; por ejemplo, el casillero correspondiente a la tercera fila y cuarta columna debe ser leído como representando "z es socialmente preferido a w" ($z >^* w$).

Ahora bien, por la condición de asimetría del juicio de preferencia, cada casillero excluye al casillero simétrico. De manera que las combinaciones posibles de preferencias sociales serán la mitad de los casos identificados. En definitiva, los casos posibles serán obtenidos mediante la expresión siguiente:

$$(n \cdot n - n) / 2$$

Por ejemplo, para cuatro opciones, habrá 6 combinaciones posibles. En consecuencia, si el número de individuos es superior al indicado, podría ocurrir que haya más de un "dictador".

(ii) *Dictadura o coincidencia*

La argumentación del TA tiene importancia singular, dado que contiene una suerte de "mensaje autoritario" (subliminal, si se quiere), en cuanto mostraría la inviabilidad de reglas democráticas. Notemos que al encontrarnos en el campo de la normativa, el impacto de este tipo de constataciones no es menor, por cuanto ellas son menos sensibles a observaciones

referidas a relevancia empírica: la validez de afirmaciones normativas responde a consensos acerca de valores, materia sobre la cual es más viable una discusión para guiar decisiones concretas, al margen de la eficacia fáctica del instrumental teórico utilizado. Dicho de una forma más sencilla, las reglas axiológicas pueden ser empleadas para tratar cualquier tipo de situación práctica, sin que exista la posibilidad de cuestionar su asidero teórico, por cuanto establecen principios que son de aplicación general. De hecho, éste es el uso habitual de determinados conceptos propios de la economía del bienestar (por ejemplo, el principio de compensación en el análisis de proyectos de inversión).

Sin embargo, la conclusión acerca de que el individuo (o los individuos, según vimos) cuyas preferencias coinciden con la regla social es un dictador es opinable.

En términos estrictos, el TA - como ya se mencionó - se limita a demostrar que para por lo menos individuo existe tal coincidencia (hemos ya señalado que bajo condiciones razonables - más individuos que opciones - es posible que haya más de un dictador). Pero el concepto de dictador incorpora un componente más fuerte, y es que **si y sólo si $x \succ y$, entonces $x \succ^* y$** . O sea, la regla social se construiría *a partir* de las preferencias de determinado individuo (o individuos). Ahora bien, en lugar alguno del desarrollo del TA se hace uso de esta hipótesis, en forma explícita o implícita.

Es real que existe aquí una coincidencia formal entre dos situaciones de naturaleza distinta. Más explícitamente, debemos considerar dos escenarios alternativos.

- Por una parte, podemos pensar en una situación donde efectivamente las preferencias sociales se construyen a partir de las de algún individuo en particular.
- Por la otra, podemos imaginar algún otro procedimiento para definir la regla de preferencia social, del que sabemos de antemano, por el teorema, que arrojará necesariamente como resultado preferencias que son coincidentes con las de algún individuo (afortunado) en particular.

Parece claro, sin embargo, que esta coincidencia formal no asegura identidad conceptual. La argumentación del TA nada asume a priori o descubre a posteriori acerca de la existencia de dictadores; se limita a constatar el resultado de que algún individuo verá coincidir el ordenamiento de preferencias producido por la regla social con su propio ordenamiento. Dilucidar si tal individuo es un "dictador" es en principio una cuestión terminológica. Pero es evidente que el término predispone para una interpretación que no parece compadecerse con el sentido general de la demostración del TA.

Como comentario adicional al respecto, es interesante notar aquí que un matiz terminológico prepara al lector del teorema para arribar a la "conclusión dictatorial". Se trata del concepto de "conjunto decisivo". La definición originaria es relativamente pasiva: se trata de identificar aquellos individuos para los cuales existe coincidencia de preferencias con la regla social. Pero la denominación "decisivo" introduce una connotación más próxima a la de imposición, que en realidad carece de fundamento^{vii}.

Por último, un comentario que apunta a morigerar el alcance del concepto de dictador. Hemos visto que el teorema compara un conjunto finito de situaciones discretas. Nada se dice acerca de la factibilidad de cada una de ellas, pero lo real es que en una situación determinada, es dable suponer que sólo un subconjunto de ellas es relevante.

Podemos sugerir al respecto que las opciones posibles se dividirán en tres clases, bajo ciertos supuestos fácilmente admisibles:

- Opciones no factibles, por exceder la disponibilidad de recursos – las mismas se denominarán $\{nf_j\}$

- Opciones factibles “próximas” a la disponibilidad de recursos – las mismas se denominarán $\{p_j\}$
- Opciones factibles “alejadas” del máximo empleo de recursos; éstas serían tales que todas ellas serían menos preferibles que las “próximas” (típicamente, apuntaríamos a las opciones que reflejan un uso muy reducido de los recursos disponibles) – las mismas se denominarán $\{a_j\}$

El juicio de preferencia social en realidad es relevante sólo para el segundo conjunto, si se admite no saciedad de las utilidades individuales y que en alguna medida el juicio sobre el conjunto social dependerá de los niveles individuales de utilidad. Por lo tanto, se reduce el rango de posibles divergencias entre preferencias individuales y la regla social. Esto es, para cualquier p_j , se dará que

$$p_j >_i n f_i$$

para todo i, j .

O sea, numerosos individuos (o tal vez todos) coincidirán con la regla social, por lo que la relevancia del juicio dictatorial se verá reducida.

Bibliografía

- Arrow, K. – Elección social y valores individuales – Planeta-Agostini – 1994.
- Kreps, D. M. - Curso de teoría microeconómica - Mc Graw Hill - 1995
- Mas-Colell, A., Whinston, M. D. y Green, J. R. - Microeconomic theory - Oxford University Press - 1995.

* Este trabajo se realiza en el marco de una investigación en curso (Proyecto UBACyT TE-07). Se agradecen comentarios de Mariano Selvaggi.

** Profesor Asociado Regular e Investigador del Centro de Estudios de Población, Empleo y Desarrollo (Facultad de Ciencias Económicas - U.B.A.) -

ⁱ Véase al respecto Mas-Colell et al. (1995, pág. 796 y ss.) y Kreps (1995, pág. 154 y ss.). Ambos textos constituyen la base para la elaboración de esta nota. Asimismo, se ha consultado el texto original de Arrow (1994).

ⁱⁱ De hecho, no se descarta que el contenido aquí vertido no haya sido expuesto previamente. Se entiende sin embargo que si lo expresado aquí es válido, sería pertinente su consideración en libros de texto.

ⁱⁱⁱ Como es obvio, tales preferencias individuales no deben ser confundidas con las que manifiestan los individuos acerca de sus consumos de bienes, aun cuando sean de aplicación conceptos generales acerca de la lógica de las preferencias (simetría, transitividad, etc.).

^{iv} Se sigue básicamente la presentación de Kreps (loc. cit.). La notación empleada es la siguiente:

x, y, z, w = estados posibles sobre los que se ejerce el juicio de preferencia y se define la regla de preferencia social

i = individuo perteneciente al conjunto social

I = conjunto de los individuos I

$>_i$ = relación de preferencia del individuo i

$>^*$ = regla de preferencia social

d = individuos pertenecientes a un conjunto decisivo

D = conjunto decisivo ($D \subset I$)

^v Nótese que no parece indispensable que los individuos tengan preferencias completas acerca del conjunto de estados posibles de la sociedad.

^{vi} Estamos en realidad extendiendo la definición de conjunto decisivo, para incorporar más de dos situaciones. Entendemos que esta redefinición no es inapropiada, por cuanto la hipótesis de transitividad permite reencontrarnos con los correspondientes juicios de a pares.

^{vii} Como caso análogo, podemos mencionar la locución "poder de mercado", empleada habitualmente para caracterizar estructuras de mercado no competitivas. En realidad, no hay propiamente "poder" en tales situaciones, sino una maximización bajo condiciones diferentes a las competitivas.