UNA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN CON PRODUCTIVIDAD MARGINAL QUASI CONSTANTE*

Eduardo Antonelli**

* Este trabajo forma parte del Proyecto Nº 1073 CIUNSa. Se agradece la participación en el mismo de Cristina Egüez.
** Docente e investigador UNSa-CIUNSa.

ÍNDICE

Abstract
In macroeconomics, usually the production function is expressed under diminishing returns conditions. Nevetherless, in practice constant returns are more often observed.

The paper suggests that there is no contradiction between both, the evidence and theory, using an appropriate production function wich is showed through the paper.

Resumen
En la teoría macroeconómica, la función de producción se propone por lo general en condiciones de rendimientos decrecientes, si bien la evidencia empírica revela más a menudo rendimientos constantes.

El trabajo sugiere que no existe contradicción entre la teoría y la evidencia empírica en tanto se emplee una función de producción apropiada, la cual se propone precisamente en este trabajo.

1. Presentación

En algunos textos de Macroeconomía (Ackley, 1961; Dornbusch y Fischer, 1998), se señala a veces que la evidencia empírica no confirma la hipótesis neoclásica tradicional según la cual la función de producción, bajo condiciones de utilización de al menos un factor fijo, exhibe rendimientos decrecientes, llevándose a cabo, por el contrario, el proceso de producción bajo condiciones de rendimientos constantes. Esto es, cuando el factor variable es el trabajo, éste acompañaría los incrementos en el producto de manera aproximadamente proporcional[1].

El problema planteado, de ser válido, no se limitaría empero al campo de la Economía solamente, toda vez que el principio de los rendimientos decrecientes no es un tema exclusivo de esta disciplina sino más general y los ejemplos abundan:

- las máquinas tienen una vida útil determinada (equivalente al factor fijo) y su rendimiento, luego de cierto número de años de uso, decae, aunque se le efectúe el mantenimiento adecuado.
- un móvil sometido a una aceleración constante aumenta su velocidad proporcionalmente, pero a medida que se aproxima a la velocidad de la luz, la misma aceleración le imprime una velocidad cada vez menor, sin que pueda alcanzar aquélla nunca .
- a medida que la temperatura de un cuerpo se aproxima al cero absoluto, el mismo patrón de enfriamiento (reducción del calor, en rigor) disminuye en menor proporción su temperatura.
- el rendimiento de combustible de un vehículo, luego de una velocidad crítica, decae.

Este trabajo propone que no resulta imposible conciliar la evidencia con la teoría económica, porque probablemente la cuestión sea más bien de grado: el principio de los rendimientos decrecientes no requiere que *siempre* que se utilice más de un factor variable con otro fijo, el rendimiento sea menos que proporcional: basta con que *en algún punto* se aprecie la limitación del factor fijo, ya que si no, éste sería redundante[2].

El requisito entonces, sería contar con una función de producción que admita situaciones de constancia o aparente constancia en los rendimientos dentro de ciertos límites,

---

[1] En la contrastación empírica, no obstante, resulta casi inevitable incorporar dados de series de tiempo, con lo cual no se estaría cumpliendo el supuesto de que el capital sea constante (si la inversión es positiva, se está agregando capital todos los períodos a la economía) y con mayor razón entonces la relación producto-empleo se mostraría como constante (e incluso creciente) porque en realidad están expandiéndose ambos factores.

2 La constancia entre el producto y el empleo se proyecta también a su determinación. Véase Antonelli, 2003.

pero que también contemple los casos en que las limitaciones del factor o factores fijos se hagan sentir. En los puntos siguientes se proponen una función de producción que intenta servir a estos propósitos.

2. La Función de Producción

El punto de partida para la búsqueda de una función de producción apropiada[3] es tomar en consideración que se pretende, como se sostenía en el punto anterior, que *bajo ciertas circunstancias* se presenten rendimientos aproximadamente constantes. Naturalmente, la función de producción, siguiendo la tradición neoclásica, mostrará rendimientos decrecientes *en general* cuando uno de los factores es fijo.

Considerando, como es tradicional, una función de producción con las variables trabajo: *N* y capital*: K* como argumentos, se propone a continuación la siguiente:

(1)[4] $Q = AN - B\frac{N^3}{K^2}; A, B, > 0$

La función dada por (1) es, lineal y homogénea[5] para *N* y *K,* ya que si se multiplica el segundo miembro por un parámetro λ los argumentos (los factores productivos), se tiene:

(2) $A\lambda N - B\frac{\lambda^3 N^3}{\lambda^2 K^2}$

Simplificando λ^3 con λ□ y sacando factor común λ, resulta:

(3) $\lambda(AN - B\frac{N^3}{K^2})$

Como se aprecia en (3), el término entre paréntesis es precisamente *Q*, por lo que se corrobora

---

3 En la literatura la palabra *idónea* (*well-behaved*) se emplea con una connotación que no es la que aquí se utiliza.

4 Esta función puede escribirse también como: (1.1) $Q = AN(1-\alpha\frac{N^2}{K^2})$, donde $\alpha = \frac{B}{A}$; la razón por la que se utiliza la expresión (1) en lugar de (1.1) es que la forma (1) es más conveniente para efectuar los análisis econométricos.

5 Desde luego, la homogeneidad lineal no es un prerrequisito para los propósitos buscados. En cambio es un razonable argumento práctico y resulta deseable que la función de producción elegida lo reúna: si todos los recursos que se necesitan para producir crecen en una misma medida, parecería que el producto debería hacerlo también en esa medida.

que (1) es lineal y homogénea[6].

Las derivadas primeras parciales, son:

(4) $\frac{\partial Q}{\partial N} = A - 3B\frac{N^2}{K^2} > 0, si K > \sqrt{3\frac{B}{A}N}$

(5) $\frac{\partial Q}{\partial K} = 2B\frac{N^3}{K^3} > 0$

Por su parte, las derivadas segundas, son:

(6) $\frac{\partial^2 Q}{\partial N^2} = -6B\frac{N}{K^2} < 0$

(7) $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -6B\frac{N^3}{K^3} < 0$

Como se observa, la función tiene derivadas primeras parciales positivas y derivadas segundas parciales negativas. La función (1), además, tiene un máximo para $K = 3\sqrt{\frac{B}{A}}N$, por lo que la derivada primera respecto a *N* (la productividad marginal de *N*, o PMgN, en adelante) es positiva en tanto, como lo indica la restricción, $K > 3\sqrt{\frac{B}{A}}N$.

La productividad media del trabajo tiene la siguiente forma:

(8) $\frac{Q}{N} = A - B\frac{N^2}{K^2}$

Por su parte, la productividad media del capital, resulta:

(9) $\frac{Q}{K} = A\frac{N}{K} - B\frac{N^3}{K^3}$

Como puede observarse, la productividad media del trabajo tiende a *A* cuando *N* □ 0. Nótese

---

6 Por lo que puede aplicársele el Teorema de Euler: $Q = \frac{\partial Q}{\partial N}N + \frac{\partial Q}{\partial K}K$, que en este caso da: $Q = A - 3B\frac{N^2}{K^2}N + 2B\frac{N^3}{K^3}K$. Resolviendo se aprecia que se obtiene precisamente (1).

asimismo que también el PMgN tiende a *A* cuando *N* tiende a cero[7]. En cambio, la productividad media del capital $\rightarrow$ cuando *K* $\rightarrow$ 0 y lo propio ocurre con la productividad marginal del capital cuando *K* $\rightarrow$ 0.

Representación gráfica

Si *K* es constante, *Q* es función solamente de *N*. Graficando para dados valores de *A, B* y *K* se tiene :

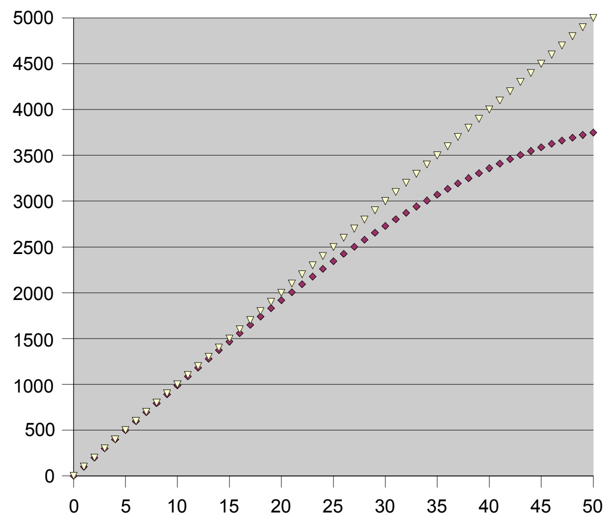

Figura 1

En las abscisas se representa *N* y en las ordenadas *Q.* Se muestra la línea *AN* que se dibuja superpuesta a la función (1) y que permite apreciar cómo se desvía sistemáticamente esta última de la línea de proporcionalidad.

El gráfico ayuda a comprender asimismo la aparente *paradoja* según la cual la producción, tal cual se apreciaría en la evidencia empírica, supuestamente seguiría un esquema de proporcionalidad. En realidad, si pudiera *completarse* el mapa de todas las alternativas de producto elaborado utilizando trabajo en cantidades variables y capital en una cantidad fija, más tarde o más temprano la brecha entre las dos funciones dibujadas: la de perfecta proporcionalidad y la que representa la productividad total, se haría evidente, como en

7Podría sostenerse que no resulta demasiado sostenible una situación en la que la productividad media y marginal sean constantes *a priori*. Sin embargo, al propio comienzo del proceso productivo se tiene una idea de cuán productiva es la mano de obra en general; ése es el sentido del parámetro *A*. Tampoco la idea alternativa de una productividad media y marginal que crece indefinidamente cuando *N* $\rightarrow$ 0 carece de problemas: ¿cómo podría ser infinita la productividad *a priori*?. Esto es, cuando se está por contratar mano de obra ¿es razonable imaginarse que la misma tiene una productividad tan grande que no puede precisarse?

el gráfico.

La gráfica del producto medio (PMe) y de la PMgN se aprecian a continuación. Se dibuja también la línea correspondiente a un PMe = PMg asociada a la función *AN*:

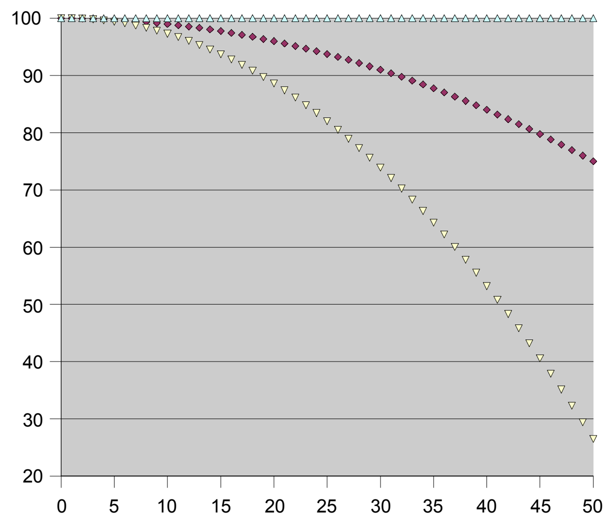

Figura 2

En este gráfico, nuevamente en las abscisas se representa el factor *N* en tanto, en las ordenadas se muestra la PMe y la PMg. Como puede observarse, tanto la PMe como la PMg se desvían progresivamente de la recta *A* (que toma un valor constante de 100 para todo *N*) que correspondería a una función lineal. Obsérvese, no obstante, cómo cuando el trabajo tiende a cero, las curvas PMe y PMg tienden al valor *A*.

La elasticidad de sustitución de factores

Este concepto mide la variación de la proporción de factores utilizados (*K/N*) respecto a la tasa marginal de sustitución. Puede expresárselo del modo siguiente:

$$(10)\sigma = \frac{\frac{\partial Q}{\partial N}\frac{\partial Q}{\partial K}}{Q\frac{\partial^2 Q}{\partial N \partial K}}$$

En el caso de la función propuesta , efectuando los reemplazos, para la derivada de *Q* con respecto a *N* y para la derivada segunda de *Q* con respecto a *N* la primera vez y a *K* la segunda[8], se tiene:

(11) $\sigma = \dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial N} 2B \dfrac{N^3}{K^3}}{Q 6B \dfrac{N^2}{K^3}}$

Multiplicando y dividiendo por *N* y simplificando, se obtiene en definitiva:

(12) $\sigma = \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial Q}{\partial N}\dfrac{N}{Q}$

Éste es un resultado interesante, porque muestra que la elasticidad de sustitución, para la función de producción elegida, depende enteramente del factor trabajo.

3. Comentarios finales

La idea de que la función de producción pueda dar cabida a un menú de escenarios algo más amplio que los considerados habitualmente, probablemente resulte bastante razonable. En efecto, cuando la función de producción es tal que la productividad marginal del trabajo es sistemáticamente decreciente, la misma no podría ajustarse a la evidencia empírica (en términos econométricos, los ajustes no serían buenos).

Alternativamente, si la función de producción posibilita rangos en los que la productividad marginal y media sean aproximadamente constantes, la misma se adecuaría a los casos en que la evidencia se asocia precisamente a situaciones de aparente proporcionalidad entre el producto y el factor trabajo.

La idea entonces es buscar expresiones matemáticas con una razonable generalidad, tal que permitan acomodar diferentes situaciones fácticas[9]. La expresión (1) -que puede ampliarse a su vez, véase nota al pie 8- va en esa dirección: encontrar una función de producción que

8Las expresiones que no se reemplazan no tienen opciones de simplificación.

9Es el caso, por ejemplo, de la ecuación relativista del tiempo: $t = t_0(1 - \dfrac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ donde *t* es el tiempo de un observador y t_0 el tiempo del "viajero", *v* es su velocidad y *c* la de la luz. Cuando la velocidad del viajero es reducida respecto a la de la luz, el cociente dentro del paréntesis es prácticamente cero y los dos tiempos coinciden. En cambio, cuando *c* se aproxima a la velocidad de la luz, el tiempo del observador (el *gemelo* de la paradoja de Einstein) se hace infinitamente grande (se ralentiza respecto al viajero). Nótese que la expresión para la productividad media del trabajo es similar. Sacando factor común A y haciendo: $C = \dfrac{B}{A} : Q = A(1 - C\dfrac{N^2}{K^2})$. Aquí interesa mostrar que la productividad cae (y no que se incrementa, como el tiempo), de allí que el paréntesis no esté elevado a una potencia negativa. Obsérvese, por último, que la función de producción del tipo de (1) podría generalizarse, despejando *Q* en la última expresión y elevando el paréntesis a una potencia positiva y menor o igual a uno.

admita diferentes situaciones, sin necesidad de conformar explicaciones ad-hoc para cada escenario posible.

4. Bibliografía

Ackley, G.	Teoría Macroeconómica. UTEHA. México, 1961.
....	Macroeconomics: Theory and Policy. Collier
MacMillan.	1978. USA.
Allen, RGD.	Teoría Macroeconómica. Aguilar, Madrid. 1971.
Antonelli, E.	"La Oferta Agregada bajo Productividad Marginal quasi Constante". *SERIES* Nº 3. Instituto de Investigaciones Económicas. UNSa. Agosto 2003 (en edición).
Dornbusch, R y Fischer, S.	Macroeconomía. Séptima Edición. Mcgraw Hill. Madrid. 1998.
Mankiw, G.N.	Macroeconomía. Antoni Bosch. Barcelona. 1998.
Nicholson, W.	Teoría Microeconómica. 6ª de. Mc Graw Hill. 1997.
Romer, D.	Advanced Macroeconomics. Mc Graw Hill. N. Y. 1996
Sachs, J. Y Larraín, F.	Macroeconomía en la economía global. Pearson. Buenos Aires. 2002.