Crecimiento Económico y Trampas de Pobreza: cuál es el rol del capital humano?

Elvio Accinelli[♣] – Gabriel Brida[♦] – Silvia London[♠]

Resumen

En este trabajo presentamos un modelo de crecimiento económico particular, concebido para un país en vías de desarrollo, en el que aparecen trampas de pobreza. Se muestra que las políticas de austeridad, tantas veces exigidas a este tipo de países, no son capaces de sacar al país del estancamiento producido por la trampa de pobreza. Sí es efectiva la inversión sostenida en la creación de capital humano, permitiendo superar la trampa de pobreza y llevar al país a un estado alto de crecimiento.

JEL Clasification: 040 – 010

Abstract

This paper introduces a model of economic growth, intended for representing developing countries, that exhibits poverty traps. The policies of financial restraint that are usually asked for those countries are shown here to lead to a lower equilibrium. That is, they do not allow those economies to get out of their poverty traps. Sustained investment in the creation of human capital, instead, helps to surpass that barrier and lead the economies towards higher growth equilibrium.

JEL Clasification: 040 – 010

Crecimiento Económico y Trampas de Pobreza: cual es el rol del capital humano?

Elvio Accinelli[♣] – Gabriel Brida[♦] – Silvia London[♠]

1. Introducción

A pesar de toda su riqueza modelística y su valor intrínseco, la teoría neoclásica no ha sido capaz de explicar persistentes diferencias en las tasas de crecimiento entre países. Más aun, existe el convencimiento de que el mundo se divide en diferentes clubes, básicamente el de los países ricos y el de los países pobres, cuyas tasas de crecimiento observan enormes diferencias. Por ejemplo, en Ros (2003) se muestra la

---

[♣] Dr. Elvio Accinelli, UAM (Azcapozalco) México. Facultad de Ingeniería IMERL, UdelaR, Uruguay (elvio@correo.xoc.uam.mx)

[♦] PhD Juan Gabriel Brida Assistant Professor in Mathematics for Economic School of Economics and Management- Free University of Bozen-Bolzano Italia. (juangabriel.brida@unibz.it)

[♠] Dra. Silvia London, Universidad Nacional del Sur, Argentina. Consejo Nacional del Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina – CONICET- (slondon@uns.edu.ar)

[♣] Dr. Elvio Accinelli, UAM (Azcapozalco) México. Facultad de Ingeniería IMERL, UdelaR, Uruguay (elvio@correo.xoc.uam.mx)

[♦] PhD Juan Gabriel Brida Assistant Professor in Mathematics for Economic School of Economics and Management- Free University of Bozen-Bolzano Italia. (juangabriel.brida@unibz.it)

[♠] Dra. en Economía, Universidad Nacional del Sur, Argentina. Consejo Nacional del Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina – CONICET- (slondon@uns.edu.ar)

no existencia de una tendencia a la convergencia ni absoluta ni condicional entre diferentes grupos de países; lejos de ello se observan brechas crecientes entre los ingresos de estos grupos lo que es contrario a lo pronosticado por el modelo de Solow (1956).

Ciertamente estas discrepancias se plantean con respecto a un modelo muy simplificado. Los países pobres no tienen tal carácter sólo por presentar una tasa de ahorro baja o alto crecimiento demográfico, o por sus bajas tasas de capital por trabajador. Tal resultado también es producto de la forma como el trabajador se relaciona con el capital y la tecnología disponible. La capacidad de adoptar tecnologías avanzadas puede tener un valor preponderante en los resultados del desempeño agregado, y esta capacidad está en relación directa con el desarrollo de las habilidades del capital humano. No atender a la necesidad de este desarrollo puede ser causa de estancamiento en el crecimiento. Según Mankiew, Roemer y Weil (1992) el desarrollo del capital humano es el factor clave omitido en la versión simple del modelo de Solow (1956).

En síntesis, los países pobres parecen estar atrapados de círculos viciosos, con tasas de crecimiento cada vez más diferenciadas de las observadas en los países ricos. Los modelos clásicos como el de Solow (1956) o Diamond (1965) no suponen tasas de crecimiento con tal tipo de diferencias persistentes.

Naturalmente que diferentes condiciones iniciales pueden explicar diferencias en las etapas del crecimiento, pero no en las tasas a largo plazo. Tales diferencias podrían verse explicadas por disímiles entornos culturales, religiosos, políticos, institucionales, etc..., todos factores exógenos en el tratamiento formal convencional. Nuestro interés es el de encontrar fenómenos endógenos que expliquen desigualdades crecientes a nivel mundial.

Intentaremos mostrar aquí, dentro del marco de la teoría neoclásica, la existencia de posibles múltiples equilibrios (estados estacionarios) originados en particularidades tecnológicas y la posibilidad de evitar equilibrios que impliquen un crecimiento lento mediante la inversión en capital humano.

Cabe destacar que la evidencia empírica muestra que un alto desarrollo del capital humano no es condición suficiente para alcanzar altos niveles de crecimiento (Argentina, Uruguay, Panamá), pero sí se presenta como una condición necesaria: ningún país ha alcanzado una senda de alto crecimiento económico sin una inversión continua en capital humano (Ros 2003). La diferenciación que se produce en las tasas de crecimiento parece deberse más al mantenimiento de una inversión sostenida en capital humano (que acompañe los niveles de crecimiento alcanzados) que a las condiciones iniciales de este capital.

¿Cómo juegan las habituales recomendaciones de austeridad a los países pobres en este contexto? Como veremos, las políticas de ahorro no permiten evitar la trampa de pobreza, es decir la permanencia en sendas de crecimiento lento. Por otra parte como es bien sabido (regla de Keynes-Ramsey), a lo largo de la senda óptima pequeñas modificaciones en el consumo que impliquen un ahorro hoy para una mejora en el futuro no conllevan aumento de bienestar social, por otra parte los rendimientos decrecientes a escala del capital hacen que cualquier posible aumento en el crecimiento en el corto plazo, obtenido por alguna política de ahorro e inversión desaparezca en el largo plazo (Blanchard y Fischer 1898). Nuestro argumento es el que la imposibilidad de los países pobres de aprovechar la tecnología avanzada, por la no inversión sistemática en el desarrollo del capital humano es lo que impide a estos países salir de las trampas de pobreza.

Otra recomendación habitual de política para evitar los equilibrios a bajo nivel de ingreso es la imposición de una política que asegure una afluencia importante de capital como base para iniciar el rápido crecimiento: Esta recomendación es impensables en países pobres: si tuvieran el capital suficiente para el “big push” con seguridad no serían países pobres, y aun consiguiendo el capital suficiente no está claro que la tecnología utilizada, los costos de transacciones y el desarrollo del capital humano sean los requeridos para utilizar este capital en forma adecuada (Worl Bank 1999). Las posibilidades de utilizar la nueva tecnología, así como las de elevar la productividad del trabajo, están positivamente correlacionadas con el nivel inicial de educación, como se destaca en los trabajos de Hoff y Stiglitz (2001) y en Ros (2003).

En el presente trabajo mostraremos la existencia de trampas de pobreza o equilibrios a bajos niveles de ingreso, como causantes de la dispersión de las tasas de crecimiento entre distintos países. No obstante mostraremos que estas trampas no son insuperables. Para este fin, en un primer modelo suponemos, siguiendo la literatura neoclásica, que la fuente de crecimiento es el capital físico, sometido a diferentes tipos de rendimiento según el estado de desarrollo que nos situemos. Veremos que en este modelo aparecen trampas de pobreza.

Nuestro segundo modelo mostrará que una inversión sostenida en capital humano permite evitar la trampa de pobreza, en la medida que dicho capital potencia la productividad del capital físico, a partir de determinados valores umbrales de uno y otro. Tal como se señaló líneas arriba, la educación es una condición necesaria pero no suficiente para alcanzar altas tasas de crecimiento. La experiencia internacional muestra que ningún país con bajo nivel de educación fue capaz de crecer rápidamente (Azariadis y Drazen 1990). Llegado el momento en que el capital físico alcanza un determinado valor umbral éste se hará productivo sí y sólo sí el capital humano acumulación alcanza un determinado valor prefijado, caso contrario aparecerán trampas de pobreza. Alcanzar o no este valor umbral dependerá de la elección realizada en el pasado por el planificador central o el agente representativo de una sociedad, quien elegirá entre inversión en desarrollo del capital humano o consumo inmediato.

Nuestro trabajo se estructura de la siguiente manera: luego de la introducción, el apartado siguiente presenta sucintamente el modelo neoclásico de Solow. Luego, en el apartado 3, se plantean dos sencillos modelos: el primero con trampas de pobreza, en un modelo de acumulación de capital físico, en el que se consideran distintas etapas productivas de un sistema económico. Luego se exhibe un modelo general con la incorporación de capital humano al esquema formal. En cuarto lugar centraremos nuestra atención en aquellos casos en los que se manifiestan trampas de pobreza en un modelo con capital físico y humano, y las posibilidades de evitar tal situación. Por último se presentan algunas conclusiones.

2. Breve descripción del modelo clásico

En el modelo clásico se suponen que los agentes de la economía maximizan una función de utilidad de la forma:

$$U(0) = \int_0^\infty e^{\rho t} u(c_t) L_t$$

donde además generalmente se representa la función en el integrando por $u(c_t)=\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$ siendo ρ una constante que representa la tasa de descuento, c_t el consumo en el momento t, L_t el tamaño de la población en el momento t, que crece exponencialmente a una tasa n, y θ una constante que representa las preferencias por el tipo de consumo.
La evolución del capital *per cápita* está gobernado por la ecuación

(1) $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t$

siendo k_t el capital *per cápita*, y δ la depreciación del capital (la que supondremos constante a lo largo del tiempo). La función f es la tecnología del modelo, idónea y cumpliendo las condiciones de Inada. Representaremos por la tasa de ahorro instantánea, por lo que: $c_t = (1-s_t)f(k_t)$.

A partir de las condiciones de primer orden correspondientes al método de Pontriaguin, siendo H la función hamiltoniana y γ el correspondiente multiplicador asociado a la evolución del capital, obtenemos las ecuaciones:

(2) $H_c(t) = e^{(-\rho+n)y}u'(c_t) - \gamma_t = 0$

(3) $H_k(t) = -\dot{\gamma} = \gamma(f'(k_t) - n - \delta)$

A partir de (2) y (3) se sigue que:

(4) $\dot{c}_t = \frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}(f'(k_t) - \delta - \rho)$

En estas condiciones la tasa de crecimiento del estado estacionario para el sistema formado por (1) y (4) corresponde a $\dot{c} = \dot{k} = 0$. Esto es, en el estado estacionario deben cumplirse las identidades:

(5) $f'(k_t) = \rho + \delta$

(6) $f(k_t) = c_t + (\delta + n)k_t$

De esta manera la ecuación (6) da lugar a la siguiente igualdad:

(7) $f(k_t) = \frac{(\delta + n)k_t}{s_t}$

con $0 < s < 1$.

En las condiciones habituales (neoclásicas) en la que la tecnología presenta retornos decrecientes a escala, esta solución corresponde a un único estado estacionario, cuyo nivel puede modificarse según la tasa de ahorro: una mayor tasa de ahorro implica un mayor nivel de capital *per capita*. Esta política, que implica un menor consumo en el presente, sólo sería aceptable si los agentes de la economía estuvieran dispuestos a aceptar reducir su consumo hoy a cambio de una mejora en el futuro. Tal situación parece impensable en los países en desarrollo: mientras que el bajo nivel de ingresos provoca que las tasas de ahorro sean exiguas, una política de reducción del consumo actual implicaría llevar a los niveles de consumo por debajo de sus niveles de supervivencia.

Por otra parte, y como discutiremos en el apartado siguiente, la elevación de la tasa de ahorro no es suficiente para alcanzar un estado estacionario más alto en un modelo con trampas de pobreza. Lejos de esto la división entre países subdesarrollados y desarrollados se seguirá manteniendo. Esto significa que si un país se encuentra en un estado bajo de crecimiento, no podrá salir de este estado mediante una política que implique simplemente reducir el consumo a cambio de inversión.

3. Trampas de pobreza

En esta sección veremos que una pequeña modificación en la función de producción es suficiente para introducir trampas de pobreza. El caso presentado es particular, y simplemente a los efectos de ilustrar lo sostenido en este trabajo.

Un modelo con trampas de pobreza

La idea central es que a diversas etapas (o estadios) de desarrollo de un país corresponden características específicas en la tecnología. Así por ejemplo, una primera etapa de desarrollo agraria corresponde a una tecnología con rendimientos fuertemente decrecientes a escala. Una segunda etapa pre-industrial, caracterizada por la construcción de carreteras, puentes, comunicaciones, infraestructura en general, representa una etapa de rendimientos crecientes a escala. Finalmente, una vez obtenida la industrialización aparece nuevamente una etapa de rendimientos decrecientes a escala. Esta división en etapas no es exclusiva de este modelo.

Supongamos que dicha tecnología puede representarse por la siguiente función[1]:

$$f(t)=\begin{cases} k^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots 0\le k\le 1/3 \\ k^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{27}}\ldots 1/3\le k\le 2/3 \\ 2k^{\frac{1}{2}}+\gamma\ldots\ldots 2/3\le k \end{cases}$$

Consecuentemente:

$$f'(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots 0\le k\le 1/3 \\ \dfrac{3}{2}k^{\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots 1/3\le k\le 2/3 \\ k^{-\frac{1}{2}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2/3\le k \end{cases}$$

Donde $\gamma=-2\dfrac{2}{3}^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{27}}$

La etapa agrícola corresponde a $k\le 1/3$, luego comienza la etapa de industrialización con rendimientos crecientes y finalmente para $k\ge 2/3$ una vez que la infraestructura

[1] Esta función es creada a partir de las representaciones tradicionales de la teoría económica

es utilizada a plena capacidad y la economía entra en una nueva fase de rendimientos decrecientes.

Si introducimos esta función de tecnología en las ecuaciones (5) y (6) y suponemos que: $\frac{\sqrt{3}}{2}s < \rho + \gamma < \sqrt{3}s$, obtenemos tres estados estacionarios, dos de comportamiento clásico (puntos de silla y con su correspondiente camino de ensilladura) separados por uno inestable (repulsor). Es decir encontramos tres valores constantes para el capital, $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ y el consumo $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ que resuelven respectivamente el sistema : $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$.

El primero y el tercero son puntos de silla, el bajo (k_1, c_1) corresponde a la etapa agrícola, mientras que el alto donde (k_3, c_3) corresponde a un país desarrollado. El primer país solo puede acceder al estado alto una vez ubicado en el camino de ensilladura. El problema es encontrar la forma de pasar de una situación en la que la mejor posibilidad es la de encontrarse en un camino de desarrollo lento, a otra en la que sea posible ubicarse en el camino que nos lleve del estado bajo al alto. Un aumento en el ahorro como mecanismo para pasar a etapas de crecimiento superiores no evita la trampa de pobreza, pues seguirán existiendo tres puntos de corte con la recta $(\delta + n)k$ y por lo tanto tres equilibrios.

Dado que k_2 se corresponde a un estado estacionario no estable, recién una vez pasado este estadio umbral el país en cuestión podrá alcanzar el estadio alto. Para sobrepasar este umbral se requiere de una cantidad tal de capital que, en caso de el país bajo análisis pudiera disponer, no se trataría de un caso de subdesarrollo: nos encontraríamos en presencia de un sistema en depresión, pero lo suficientemente desarrollado como para disponer del monto necesario de capital (propio o por endeudamiento) para realizar el “big-push”. Tendremos entonces que plantear una estrategia razonable para salir de la trampa de bajos niveles de ingresos para aquellos países pobres cuyas posibilidades se encuentran más restringidas.

En la siguiente sección mostraremos cómo el crecimiento del capital humano puede transformarse en un factor fundamental para salir de la trampa de pobreza[2]. Teniendo en cuenta la observación hecha en Azariadis y Drazen (1990) y Ros (2003) acerca de que ningún país con bajas tasas de inversión en capital humano ha conseguido altas tasas de crecimiento, centraremos nuestra atención en la inversión en capital humano, lo cual puede ayudar también a hacer menos desigualdades las dotaciones iniciales de los miembros de la sociedad.

Un modelo con Capital humano

En esta sección introduciremos el capital humano en un modelo de crecimiento *à la* Lucas (1988), y mostraremos que el crecimiento en forma sostenida del capital humano es suficiente para salir de una trampa de pobreza. La capacidad productiva de los individuos aumenta con su educación, no sólo por la incorporación de habilidades y capacidades para el trabajo, sino también por el impacto sobre la salud y alimentación, que incrementa la productividad laboral.

[2] Es posible buscar para esta salida otras alternativas, como por ejemplo una distribución más equitativa de la riqueza que haga que una cantidad mayor de integrantes de la sociedad se vea más atraída a participar por ejemplo en esquemas de incentivos. No obstante este no es el camino elegido aquí.

En Usawa (1965) y Lucas (1988) se presentan las ideas básicas que permiten introducir el capital humano como potenciador del capital y como factor de su propia reproducción y crecimiento. Representemos por $h(t)$ las habilidades y capacidades promedio de la población. Al igual que en el planteo de Lucas, parte del tiempo estas habilidades son destinadas a la producción de bienes materiales, mientras el resto se destina al propio cultivo y desarrollo de estas habilidades. Así $h_y(t) = u(t)h(t)$ representa la fracción de las habilidades potenciales destinadas a la producción en el instante t mientras que $h_H(t) = (1 - u(t))h(t)$ representa las fracción de estas mismas habilidades destinadas a la creación y desarrollo de las habilidades mediante un proceso educativo.

Sea $H(t) = h(t)L(t) \quad K(t) = k(t)L(t)$ el capital humano (habilidades) disponible por la sociedad y el capital total en el momento t. Supongamos que una parte de la riqueza producida es destinada a la inversión en capital fijo, otra parte se dedica al desarrollo del capital humano y el resto al consumo. Asumimos que el producto *per-cápita* es función de la habilidad promedio del capital humano y del capital fijo *per-cápita*, en la forma siguiente: $y = f(k)g(h)$.

Las ecuaciones que rigen la evolución de las variables de estado serán las siguientes:

(8) $\quad \dot{k} = Af(k)g(uh) - (\delta_k + n)k$

(9) $\quad \dot{h} = Bf(k)g(uh) - (\delta_H + n)h$

Donde $A = (1 - s - p)$, $B = (1 - r - p)$, con s, r y p los porcentajes del producto destinados a la inversión en capital fijo, capital humano y consumo, respectivamente. A y B son en principio variables, la función g representa la productividad del capital humano en la creación de bienes de capital, mientras que δ_H representa la depreciación del capital humano, olvido de conocimientos adquiridos, obsolescencia de los mismos, etc....

Los agentes maximizarán su función de utilidad respecto al consumo c y respecto a la fracción u que dedicarán a la producción de bienes de capital. Tendremos además ahora dos ecuaciones de estado: (8) y (9). Desde el punto de vista del método para obtener la solución sigue siendo el de Pontriaguin, esta vez con dos variables de estado, k y h, y los consecuentes dos multiplicadores μ y ν asociados a tales restricciones. Para simplificar el álgebra podemos considerar que $\delta_H = \delta_K = \delta$.

Nos interesa destacar que luego de planteadas las ecuaciones de primer orden y las correspondientes ecuaciones canónicas obtendremos, haciendo un poco de álgebra:

(10) $$\gamma_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{u_{cc}}{u_c}(Af'(k)g(uh) + Buf(k)g'(uh) - 2(\delta + \rho)$$

En el estado estacionario el valor de u será constante. Una tasa de crecimiento de estado estacionario supone que la siguiente identidad se verifica :

(11) $$(Af'(k)g(uh) + Buf(k)g'(uh) = 2(\delta + \rho)$$

A partir de las ecuaciones (8) y (9) llegamos a la conclusión de que en estado estacionario debe verificarse que $\bar{k} = \frac{A}{B}\bar{h}$.

Supongamos, a los efectos de simplificar que $g(uh) = (uh)^{\alpha}$. Sustituyendo en (8) obtenemos que en cada estado estacionario debe verificarse:

$$(12) \qquad Af(\bar{k})(u\,\bar{h})^{\alpha} = (\delta + n)\,\bar{k}$$

Por lo que el capital $\bar{k}$ en el estado estacionario debe verificar:

$$(13) \qquad f(\bar{k}) = \frac{(\delta + n)\,\bar{k}}{A(u\,\bar{h})^{\alpha}}$$

Como en estado estacionario, $\bar{h} = \frac{B}{A}\bar{k}$,sustituyendo en (13) obtenemos que:

$$f(\bar{k}) = \frac{\delta + n}{A^{1-\alpha}B^{\alpha}u^{\alpha}}\bar{k}^{1-\alpha}$$

Manteniendo la misma función para el capital fijo, encontramos ahora un único nuevo estado estacionario. Desaparece entonces la distinción entre estados estacionarios bajos y altos. Es decir el aumento de la productividad basado en el desarrollo del capital humano hace que alcanzar el umbral para pasar al estado alto requiera una cantidad menor de capital fijo. De esta manera países con un desempeño pobre de capital humano precisarán de una cantidad mayor de capital fijo (quizás en cantidades inalcanzables para el país en cuestión) para obtener estados estacionarios altos de crecimiento.

4. Inversión en Capital Humano: superación de la Trampa de Pobreza?

En esta sección mostraremos como, en definitiva, la posibilidad de evitar la trampa de pobreza, o caer en ellas depende de la elección que los países hagan entre consumo alto o inversión alta en capital humano, en el momento en que el capital físico haya llegado al umbral a partir del cual su productividad depende en alto grado de las habilidades de los trabajadores. Esta elección es resultado de las funciones de utilidad, o si se quiere, de lo que el planificador central entienda como fundamental para sus intereses.

Es importante destacar que las trampas de pobreza son inherentes al modelo. La tecnología presenta la posibilidad de bifurcar a partir de ciertos valores umbrales de capital físico y capital humano. Si no se alcanzan estos valores umbrales el sistema evoluciona hacia el equilibrio de bajo nivel, superados los umbrales se vislumbra un horizonte con un único estado estacionario alto. La posibilidad de que, alcanzado el valor umbral para el capital físico, se alcance el valor umbral del capital humano, dependerá de la historia de ahorro y consumo del sistema en cuestión. **Idénticas tecnologías, con idénticos valores de capital físico, dan lugar a trayectorias diferentes si el capital humano no es el adecuado.** Este es el punto que deseamos destacar en las próximas líneas.

Consideremos una economía cerrada tal que en cada momento t tiene $L(t)$ agentes racionales idénticos. La tasa de crecimiento poblacional es exógena e igual a la constante $n > 0$, de modo que $\dot{L}(t) = nL(t)$. En la economía hay dos tipos de bienes diferentes, uno es un bien de consumo inmediato (de subsistencia) y el otro será llamado consumo en educación o en desarrollo de capital humano, que representa lo que los agentes consumen para desarrollar sus habilidades. Las unidades consumidas del primer bien en el momento t se representarán por $c(t)$ mientras que por $h(t)$ representaremos las unidades consumidas para el desarrollo del capital humano. Si bien un consumo básico del bien de subsistencia c_0 es necesario para que la economía pueda reproducirse, a efectos de simplificar el análisis supondremos que $c_0 = 0$.

Cuánto de la producción total sea destinada a uno u otro tipo de consumo es una decisión propia del sistema, ya sea por la representación de sus agentes económicos o por la imposición de un planificador central. Es, en definitiva, el resultado de procesos de maximización de las funciones de utilidad.

Así, las preferencias de los agentes se representan por:

(14) $$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[ac^{\theta}(t) + bh^{1-\theta}(t)\right]L(t)dt$$

Donde $0 < \rho < 1$ es la tasa de descuento intertemporal, $0 < \theta < 1$, a y b son constantes positivas.

La producción *per capita* del único bien está dividida en consumo de subsistencia $c(t)$, incremento de las actividades laborales $h(t)$ y acumulación de capital $k(t)$. Si $k(t)$ es el inventario *per capita* y $\dot{k}(t)$ su tasa de cambio, entonces el producto total *per capita* es $y(t) = c(t) + h(t) + (+n)k + \dot{k}$, donde $0 < \delta < 1$ es la tasa de depreciación del capital.

En el modelo la función de tecnología en forma intensiva $f(k,h)$ está definida como:

$$f(k,h) = \hat{f}(k)g(h)$$

Donde $\hat{f}(k)$ y $g(h)$ verifican

1. $\hat{f}(k) = 0$

2. La derivada $\hat{f}'(k) > 0, \forall k > 0$

3. $\lim_{k \to o} \hat{f}'(k) = \infty$ y $\lim_{k \to \infty} \hat{f}'(k) = 0$

4. Además $\hat{f}(k)$ presenta rendimientos decrecientes a escala en una etapa inicial de crecimiento del capital físico, $k \in [0, k_1]$ y en una etapa final, a partir de cierto $k = k_2$, análogamente a lo exhibido en el modelo del apartado 3. En una etapa intermedia

durante la cual $k \in (k_1, k_2)$ presenta rendimientos crecientes. Por lo tanto la derivada segunda de $\hat{f}(k)$ verifica:

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} < 0, si \quad k \le k_1\, o \quad k \ge k_2 \\ > 0, si \quad k_1 < k < k_2 \end{cases}$$

5. $g'(h) \ge 0, \forall h \ge 0$
6. $g(h_0) \ge 1$
7. $g(h) = 1$ si $0 \le h \le h_0$ o $0 < k \le k_0$

Donde k_0 y h_0 representen respectivamente valores umbrales para el capital físico y el humano respectivamente, a partir de los cuales el incremento de la productividad del capital depende fuertemente de las habilidades de los trabajadores, y el grado h_0 de desarrollo del capital humano a partir del cual éste es productivo acorde al capital físico. En otras palabras, se supone que un trabajador escasamente habilidoso no conseguirá operar con éxito una tecnología compleja, mientras que la no existencia tal tipo de tecnología torna inoperante o innecesario un capital humano altamente calificado.
Asumimos que la producción depende de los niveles de capital físico y humano, de acuerdo a la ecuación diferencial:

(15) $$\dot{k}(t) = f(k(t), h(t)) - (\delta + n)k(t) - c(t) - h(t)$$

El problema de asignación de recursos se remite entonces a hallar las trayectorias temporales óptimas $c(t)$ y $h(t)$ del consumo *per capita* del bien de subsistencia y de desarrollo *per capita* de las habilidades laborales. Dadas las trayectorias anteriormente elegidas y el capital inicial $k(0)$ la trayectoria del capital $k(t)$ quedará determinada a partir de la ecuación (15).

Las trayectorias óptimas para $c(t)$, $h(t)$ y $k(t)$ son aquellas que resuelven el problema de maximizar la función de utilidad (14), restringida a la ecuación diferencial (15). Llamaremos estado estacionario a una solución del problema de maximización anteriormente referido, tal que $c(t)$, $h(t)$ y $k(t)$ son constantes.

El hamiltoniano para el problema de optimización restringido a que se enfrentan los agentes de la economía está dado por:

(16) $$H(k, h, c, \eta) = \left[ac^{\theta} + bh^{1-\theta}\right] + \eta f(k, h) - (\delta + n) - c - k$$

En este modelo hay dos variables de control, c y h y una variable de estado k. Las condiciones de primer orden son:

(17) $$\begin{aligned} H_c &= a\theta c^{\theta-1} - \eta \\ H_h &= b(1 - \theta h^{-\theta}) - \eta\left[1 - \frac{\partial f(k,h)}{\partial h}\right] = 0 \\ \dot{\eta} &= -\frac{\partial H}{\partial k} = -\eta\left[\frac{\partial f(k,h)}{\partial k} - (\delta + n) - 1\right] \end{aligned}$$

Nótese que $\dfrac{\partial f(k,h)}{\partial h} = \hat{f}(k)g'(h)$ y que $\dfrac{\partial f(k,h)}{\partial k} = \hat{f}'(k)g(h)$.

Supongamos que $k(0) < k_0$ por lo tanto cierto intervalo inicial $[0, t_0]$ será $k(t) < k_0 \forall t \in [o, t_0]$. Para t en dicho intervalo $f(k,h) = \hat{f}(k)$ por lo tanto las conciones de primer orden (17) en $t \in [o, t_0]$ serán:

$$
\begin{aligned}
& a\theta c^{\theta-1} - \eta = 0 \\
(18) \quad & b(1 - \theta h^{-\theta}) - \eta = 0 \\
& \dot{\eta} = -\eta \left[\frac{1}{2} k^{\frac{1}{2}} - (\delta + n) - 1 \right]
\end{aligned}
$$

Derivando con respecto a t en las ecuaciones anteriores y con un poco de álgebra llegamos a las identidades:

$$
(19) \quad \dot{c} = -\frac{c}{\theta - 1} \left[\frac{1}{2} k^{\frac{1}{2}} - (\delta + n) \right]
$$

$$
(20) \quad \dot{h} = -\frac{h}{\theta} \left[\frac{1}{2} k^{\frac{1}{2}} - (\delta + n) \right]
$$

$$
(\theta - 1)\frac{\dot{c}}{c} = -\theta \frac{\dot{h}}{h}
$$

A lo largo de la trayectoria óptima el consumo del bien de subsistencia tomará los valores:

$$
c(t) = c_0 \exp\left\{ \frac{1}{\theta - 1} \int_0^t \left[\frac{1}{2} k^{\frac{1}{2}} - (\delta + n) \right] \right\}
$$

Supongamos ahora que para $t = T$ el capital físico alcanza el valor k_0, es decir $k(T) = k_0$. Si en este momento el capital humano alcanza el valor h_0 la tecnología tomará la forma $f(k,h) = \hat{f}(k)g(h)$ viéndose entonces la productividad potenciada por el capital humano. Para que ello sea posible se requiere que:

$$
c(T) \leq (h_0)^{\frac{\theta}{\theta - 1}}
$$

Es decir que sólo cuando la función de utilidad tenga un valor del parámetro θ suficientemente bajo la elección óptima del consumo productivo tendrá un valor suficientemente bajo como para que la inversión en capital humano supere el umbral prefijado en el momento t_0 en el que el capital físico alcanzó el valor k_0. Si esto es así, la trayectoria óptima para c y h y k se obtendrán a partir de t_0 de las ecuaciones (17), donde deberá considerarse $f(k,h) = \hat{f}(k)g(h)$, siendo a partir de entonces

$g(h) > 1$. Una vez transpuesto este umbral el modelo se comporta como el de Lucas (1988), y de esta forma el capital humano pasó a transformarse en un factor productivo que permitió sortear la trampa de pobreza y alcanzar una trayectoria de crecimiento sostenido.

5. Conclusión

La principal conclusión a la que arribamos es que la inversión sostenida en capital humano es, en el marco formal propuesto, una opción válida para salir de una trampa de pobreza. Un grado umbral de desarrollo del capital humano es necesario para potenciar el capital físico, una vez que este alcanzó un desarrollo importante. La sola acumulación de capital físico sin un correspondiente desarrollo del capital humano no es suficiente para que un país pueda sortear las trampas de pobreza.

Los resultados parecen apuntar en el sentido de que la inversión en educación y sanidad debe ser permanente y acompañar al crecimiento en todos sus momentos. La respuesta a quienes proponen esperar para las inversiones socialmente importantes hasta que el país sea más rico pueden revertirse fácilmente (ver propuestas de Sen 1999). En todo caso basta considerar el ejemplo del Japón como país pionero en el desarrollo de oportunidades sociales, en especial educación, y la relación de estas inversiones en capital humano con los períodos de crecimiento del país. Las inversiones más importantes en el citado país en la creación de oportunidades sociales se observan principalmente en los primeros tiempos de la era Meji, de 1868 en adelante (Sen 1999). Las necesidad de capital fijo, fundamental para alcanzar estados altos de crecimiento, disminuyen en la medida que el capital humano se hace más productivo. Entonces tiene sentido hablar de una convergencia global a un estado estacionario alto, si y solamente si los países mantienen una inversión constante y sostenida en el desarrollo del capital humano. En otro caso los países en desarrollo están destinados a permanecer en un estado de desempeño pobre del que no pueden sacarlo ninguna política global que promulgue la austeridad, a excepción de aquellas en las que el incremento en el ahorro se encuentre destinado a la financiación de acumulación de capital humano.

Bibliografía

[Azariadis, C.; Drazen, A.]``*Threshold externalities in economic development"* Quaterly Journal of Economics 105: pp 501-526, (1990)

[Blanchard, O.J.; Fischer, S.] Lectures on Macroeconomics' The Mit Press, (1989).

[Diamond P.]``*National Debt in a Neoclassical Growth Model."* American Economic Review, LV, 1026-1050, (1965).

[Hoff, K.; Stiglitz, J.]Modern Economic Theory and Development. Frontiers of Development Economics. Ed. By Meier, G.M. and Stiglitz, J.E. pp. 389-459, (2001)

[Lucas, R.]``*On the Mechanics of Development Planning."* Journal of Monetary Economics 22/ 1, pp. 3-42, (1988).

[Mankiew, G.; Roemer, D.; Weil, D.]``*A Contribution to the Empirics of economic growth"* Quarterly Journal of Economics 107, pp 407- 437.

[Murphi, K.; Shleifer, A.; Vishny, R.]``*The allocation of talente: Implications for growth."* Quarterly Journal of Economics, 106, pp 503-530, (1991).

[Ros, J.] Development Theory and the Economics of Growth University of Michigan Press, (2003).

[Sah, R. Stiglitz, J] Sources of Technological Divergence between Developed and Less
Developed Countries. Essays in Memory of Carlos Díaz-Alejandro, pp. 423-46. Ed by Calvi, G. and others. Cambridge Mass. Blackwell, (1989).

[Sen, A.] Desarrollo y Libertad Ed. Planeta. (1999).

[Solow, R] ``*A Contribution to the Theory of Economic Growth."* Quarterly Journal of Economics LXX, 56-94, (1956).

[Usawa, H.] `` *Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth."* International Economic Review 6, pp. 18-31, (1965).

[Worl Bank (1999)] World Development Report 1998/1999. Knowledge for Development. N.Y. Oxford University Press.