ASOCIACION ARGENTINA
DE ECONOMIA POLITICA

ANALES | ASOCIACION ARGENTINA DE ECONOMIA POLITICA

XLIII Reunión Anual

Noviembre de 2008

ISSN 1852-0022
ISBN 978-987-99570-6-6

Dinero, Overshooting y Crecimiento en una Economía Abierta

Javier Gerardo Milei

Dinero, Overshooting y Crecimiento en una Economía Abierta

Javier Gerardo Milei[1]
Universidad de Buenos Aires
Universidad del Salvador

Resumen
En el presente trabajo se desarrolla un modelo de crecimiento en la línea Solow-Swan con dinero para el caso de una economía abierta, el cual constituye una continuación analítica del modelo Tobin-Sidrauski. A diferencia del resultado tradicional donde el dinero no es superneutral en un sentido positivo, en el presente modelo lo es en un sentido negativo, ya que la relación capital-trabajo y el producto per-cápita caen, donde dicho resultado se sustenta sobre la base de que un mayor ritmo de emisión estimula un cambio de portafolio a favor del activo extranjero en detrimento tanto del dinero como del capital.

Abstract
The current paper develops a growth model following the structure of the Solow-Swan including money in an open economy, which is an analytical continuation of the Tobin-Sidrauski model. Opposite to the traditional conclusion where money is superneutral in a positive way, in this case it is in a negative way, due to the fact that both, the capital-labor ratio and the product per capita drop, which makes sense because as the rate of money supply expansion rises there is a change in the composition of portfolios in favor of the foreign asset and against money and capital goods.

Palabras Claves, Códigos JEL:
O.42 ï Monetary Growth Model
F.43 ï Economic Growth of Open Economies
A.23 ï Economics Education and Teaching of Economics: Graduate

[1] El autor desea agradecer los valiosos comentarios de Juan Carlos de Pablo, Diego Giacomini, Osvaldo Baccino, Jorge Paz, Martín Krause y a todos aquellos que presenciaron la exposición realizada en la reunión Nº 42 de la AAEP (Bahía Blanca) sobre la mayor contribución científica de Miguel Sidrauski. Por último, también deseo agradecer a Hernán Boracchia, Nicolás Kerst, Leandro Marcarian y Agustina Sclarandi por el trabajo de edición y la colaboración para alcanzar un formato accesible (sin perder rigurosidad) en la presentación de un tema complejo. Naturalmente, los errores son absoluta responsabilidad del firmante.

1. Introducción

Mientras que en los modelos walrasianos tradicionales se estudia la neutralidad del dinero bajo la forma de ejercicios de estática comparada, en los modelos de dinero y crecimiento se analiza la cuestión de la superneutralidad. Este último criterio se suele enunciar de manera más directa, donde en lugar de juzgar los efectos de una sola vez en la oferta monetaria de acuerdo a la constancia de la tasa de interés de equilibrio, en los modelos con crecimiento se analizan los efectos sobre la relación capital-trabajo de un cambio en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria (Harris 1981). Los efectos de un aumento en la tasa de crecimiento de la oferta monetaria sobre la relación capital-trabajo del sendero de crecimiento de equilibrio dependen del modelo, ya que según sean los supuestos utilizados, dicha relación puede aumentar, disminuir o permanecer constante. Además, vale la pena notar que, en este contexto, a diferencia de los modelos tradicionales, la discusión entre activos internos y externos no desempeña ningún papel importante, aún cuando los distintos modelos presenten aspectos distintivos en la combinación de activos internos y externos. En efecto, en esta familia de modelos, en general, se observa que el dinero no muestra la cualidad de superneutral (la excepción a esta regla es el trabajo de Sidrauski publicado por el AER -1967.a-), aun cuando el único activo financiero fuera el dinero externo.

Los modelos monetarios de crecimiento se distinguen por dos tipos de supuestos particulares. El primero se refiere a la dinámica de ajuste del nivel de precios. Así, mientras que en los modelos neoclásicos el nivel de precios se ajusta de manera instantánea para mantener el equilibrio en el mercado monetario, en los modelos de la línea Keynes-Wicksell-Stein-Rose, los precios cambian en respuesta al desequilibrio en el mercado de bienes. El segundo punto en que difieren los modelos se refiere a las distintas teorías sobre el ahorro y que papel desempeña el dinero en la economía.

A su vez, en la línea de los modelos de crecimiento neoclásico del tipo Solow-Swan, Tobin (1965) y Sidrauski (1967.b) suponen que el ahorro es una función del ingreso disponible. Una forma alternativa de trabajar es suponiendo que el ahorro es una función de la riqueza tal como lo hace Harry Johnson en un trabajo publicado en 1966. En este último caso, el ahorro per-cápita será una función del stock de capital y de los saldos reales, ambos en términos per-cápita. Dado que el ahorro es consumo futuro, en la medida que el primero aumenta (al tiempo que también lo hace la riqueza), la utilidad marginal del consumo futuro cae. Así, a mayor riqueza, la disposición de los agentes de trasladar consumo al futuro cae, por lo que dada la tasa de preferencia temporal y la tasa de interés, se decide trasladar consumo hacia el presente, generando así una reducción del ahorro en el momento actual. Por lo tanto, cuanto mayor nivel de riqueza, el ahorro debería ser menor. De esta forma, Harry Johnson construye una relación funcional para el ahorro, donde la riqueza interviene con signo negativo. Por lo tanto, cuando la tasa de creación de dinero aumenta, siendo el dinero neutral, la tasa de inflación aumenta y con ello la tasa de interés nominal, por lo que la demanda de dinero cae. Dado, que la caída en la demanda de dinero trae aparejado un salto en el nivel de precios (para dejar equilibrado el mercado monetario)[2] los saldos reales caen. A partir de esto se produce una caída en la riqueza y con ello un salto en el ahorro. Este mayor ahorro conduce a una mayor inversión y con ello a una mayor relación capital-producto, por lo que el producto per-cápita aumenta.

Por otra parte, siguiendo los enfoques de Marty (1962) y Levhari y Patinkin (1968) podría incorporarse el dinero como un factor dentro de la función de producción. De esta manera, un aumento de la tasa de creación de dinero conlleva a una reducción de

[2] Este mecanismo de ajuste en los precios es propio de toda la familia de modelos donde los mismos se determinan en el mercado monetario y no en el mercado de bienes al estilo Keynes-Wicksell-Stein-Rose. A su vez, dado que estos modelos representan equilibrios del tipo "punto de silla", el salto en el nivel de precios es funcional al sostenimiento del equilibrio global del sistema. En el fondo, el salto en precios asegura que la dinámica del modelo se mantenga en el brazo estable evitando una situación de divergencia.

los saldos reales. A su vez, como en esta línea se considera al dinero como un activo interno (con lo cual no afecta ni a la riqueza ni al ingreso disponible), ello no impacta sobre la tasa de ahorro per-cápita, por lo que con la caída del producto, la relación capital-trabajo disminuye. Otra alternativa en esta línea fue sugerida por autores tales como Levhari y Patinkin (1968) y Harry Johnson (1966), que consiste en tratar al dinero como un bien de consumo y no como un bien de producción. Así, en esta línea analítica, se supone que los saldos reales rinden directamente una utilidad a los consumidores, en lugar de intervenir en la función de producción,

En función del mencionado debate, el presente trabajo abordará la superneutralidad del dinero en el marco de una economía abierta. Respecto a la metodología de inclusión del dinero y la función de ahorro, se optó por la línea analítica desarrollada por Tobin (1965) y Sidrauski (1967.b). A su vez, para facilitar la comprensión del modelo se decidió trabajar con matemática discreta, al tiempo que los pasos de todas las demostraciones se incluyen de manera explícita. Así, en la segunda parte se presenta la estructura real del modelo, la cual se ajusta al formato del Solow-Swan. En la tercera se define el proceso de acumulación de riqueza entre bienes de capital, dinero doméstico y moneda extranjera. A continuación se analizan las condiciones del equilibrio de estado estacionario y se procede al estudio de la superneutralidad dentro de la lógica del presente modelo. Respecto a las condiciones de equilibrio en el estado estacionario se verifica la neutralidad del dinero (a lo igual que todos los modelos de la presente línea analítica), la paridad del poder de compra (extensión natural para el caso de una economía abierta) y una relación capital-trabajo en línea con el resultado de Solow-Swan (donde la economía crece a una tasa similar a la que lo hace la población). Por otra parte, respecto a la superneutralidad, se demuestra que dicha condición no se cumple, donde a diferencia del resultado tradicional donde el dinero no es superneutral en un sentido positivo (a fines estrictamente comparativos, en el Apéndice 2 se desarrolla el modelo Tobin-Sidrauski en similar formato y bajo el esquema de acumulación planteado por Walsh), en el presente modelo lo es en un sentido negativo, ya que la relación capital-trabajo y el producto per-cápita caen. Dicho resultado se sustenta sobre la base de que un mayor ritmo de emisión (a partir de los saltos en el nivel de precios y del tipo de cambio real) estimula un cambio de portafolio a favor del activo extranjero en detrimento tanto del dinero como del capital. Una vez concluido este análisis, el quinto punto del trabajo se procede a estudiar un sub-caso dentro del modelo, el cual se concentra en el estudio de la relación capital-producto y el tipo de cambio real. Así, ante un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero se demuestra la presencia de overshooting en el comportamiento del tipo de cambio real en una economía con crecimiento, donde la rigidez del mercado de bienes (diferencia en la velocidad de ajuste) surge del supuesto de una tasa de amortización menor al cien por ciento (en el caso especial del presente trabajo la tasa de amortización se supone nula). Por último se presentan las conclusiones.

2. Estructura Productiva del Modelo

El modelo de crecimiento neoclásico de Solow-Swan (donde el ahorro se determina como una fracción constante del ingreso), junto al modelo de Ramsey-Cass-Koopmans (para cuando el ahorro surge un proceso de optimización) provee el marco básico de la macroeconomía moderna. En el caso concreto del modelo Solow-Swan, el mismo presenta tres ingredientes fundamentales: (i) una función de producción que permite una sustitución suave entre capital y trabajo, (ii) un proceso de acumulación en el cual se ahorra una fracción constante del ingreso y la cual se destina al financiamiento de la inversión y (iii) un crecimiento constante de la población. En este contexto, Solow-Swan demostraron que una economía con estas características convergerá a un equilibrio de estado estacionario donde la relación capital-trabajo es constante, lo cual implica que la economía terminará creciendo a la misma tasa que lo hace el capital y el trabajo (ver Apéndice 1).

En función de ello, en el presente trabajo, para modelar el sector real de la economía, dado que utilizaremos como marco de referencia el modelo Solow-Swan, tomamos como punto de partida la función de producción neoclásica sin progreso tecnológico, la cual presenta como sus argumentos al stock de capital del período anterior (K_{t-1}) y al trabajo utilizado en el momento presente (N_t):

$$Y_t = Y\left(K_{t-1}, N_t\right) \quad \textbf{(1)}$$

la cual presenta las siguientes propiedades:

(i) rendimientos constantes a escala

$$Y\left(\lambda K_{t-1}, \lambda N_t\right) = \lambda Y\left(K_{t-1}, N_t\right)$$

(ii) productividad marginal de los factores positiva, pero decreciente

$$\frac{\partial Y}{\partial K_{t-1}} > 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial N_t} > 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K_{t-1}^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial N_t^2} < 0$$

(iii) cumplimiento de las condiciones de Inada

$$\lim_{K_{t-1}\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial K_{t-1}} = \lim_{N_t\to\infty} \frac{\partial Y}{\partial N_t} = 0$$

$$\lim_{K_{t-1}\to 0} \frac{\partial Y}{\partial K_{t-1}} = \lim_{N_t\to 0} \frac{\partial Y}{\partial N_t} = \infty$$

Por lo tanto, dado que la estructura productiva mantiene un formato similar al modelo Solow-Swan, el estudio de la superneutralidad del dinero se concentrará en si modificaciones de la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero afecta la relación capital-trabajo y no si se modifica la tasa de crecimiento de la economía en el estado estacionario (ver de Pablo 1980), la cual es constante e igual a la tasa de crecimiento de la población ñnò

3. Acumulación en una Pequeña Economía Abierta

3.1. El Conjunto de Activos y la Restricción Financiera

El modelo Solow-Swan se corresponde con el caso especial de una economía cerrada sin gobierno ni dinero. Los bienes son intercambiados y las transacciones deben tomar lugar sin que exista un medio de cambio que sea utilizado para facilitar las transacciones. Esto es, en dicho modelo no existe un activo tal como el dinero, el cual no brinda retorno alguno a sus poseedores. Entonces, para emplear el modelo de crecimiento neoclásico en el análisis de los efectos propios de la política monetaria, debemos especificar una función de comportamiento para los agentes, de modo tal que los mismos deseen mantener cantidades positivas de dinero. Claramente, una función de demanda de dinero positiva es necesaria para que, en equilibrio, el dinero tenga valor, lo cual no es mas ni menos que la contrapartida de que el precio de los bienes esté acotado. Tal como se mencionara al inicio, el dinero ha sido incorporado de maneras diversas, siendo James Tobin (1965), el primero en incluir el dinero en un modelo de crecimiento del tipo Solow-Swan. Sin embargo, el análisis de Tobin se concentra en el caso de una economía cerrada y con un único activo alternativo (el dinero) frente al capital físico. De esta manera, los alcances y predicciones del modelo se ven fuertemente limitadas, a punto tal que las consignas de política económica del mismo están fuertemente refutadas por el comportamiento de los agentes, lo cual encuentra su correlato en una evidencia empírica adversa (McCandless y Weber -1995-). A tales efectos, en la presente sección procedemos a la incorporación de un nuevo activo, que para el caso de una economía abierta pequeña (tomadora de precios en los mercados internacionales, esto incluye la tasa de interés ï r_t ï), estará dado por la moneda extranjera. Así, cada uno de los agentes podrá acumular su riqueza real (a_t) bajo la forma de tres activos: (i) bienes de capital (k_t), (ii) dinero doméstico (m_t) y (iii) moneda extranjera (f_t), por lo que la restricción de portafolio estará dada por:

$$a_t \equiv k_t + m_t + f_t \quad \textbf{(2)}$$

siendo:

$$k_t \equiv \frac{K_t}{N_t} \quad ; \quad m_t \equiv \frac{M_t}{P_t \cdot N_t} \quad ; \quad f_t \equiv \frac{E_t \cdot F_t}{P_t \cdot N_t}$$

donde los tenencias de dinero doméstico per-cápita estarán dadas por los saldos reales (M_t/P_t) sobre la cantidad de agentes de la economía, mientras que las tenencias de moneda extranjera (F_t/N_t) en términos per-cápita están ponderadas por el tipo de cambio real (E_t/P_t), siendo F_t la cantidad del activo y E_t el tipo de cambio nominal.

3.2. El Proceso de Acumulación

Para la determinación del ahorro bajo el caso en el que existe previsión perfecta en materia de precios (bienes, tasa de interés y tipo de cambio), si bien se mantiene el formato de una propensión al ahorro media y marginal constante, tal como se hace en el modelo Solow-Swan y en el Tobin-Sidrauski, dado que nos encontramos trabajando en una economía abierta, la definición de ingreso relevante viene dada por el Ingreso Nacional Disponible de las Familias, la cual incluye además del ingreso del período (propio del Solow-Swan), las transferencias del Gobierno y el impuesto inflacionario (asociados al Tobin-Sidrauski), el pago de intereses a los extranjeros (natural de una economía abierta). Así, la definición de ingreso relevante para las familias estará dada por la siguiente expresión:

$$Y_t - r\frac{E_t F_t}{P_t} + \tau N_t + \left[\frac{M_{t-1}}{P_t} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\right] - \left[\frac{E_t F_{t-1}}{P_t} - \frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}}\right] \quad \textbf{(3)}$$

donde, el cuarto término pone de manifiesto la pérdida de capital derivada por la presencia de inflación, la cual representa el impuesto inflacionario:

$$\left[\frac{M_{t-1}}{P_t} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\right] = \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \left[\frac{P_{t-1}}{P_t} - 1\right] = \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \left[\frac{1}{(1+\pi_t)} - \frac{(1+\pi_t)}{(1+\pi_t)}\right] = \frac{-\pi_t}{(1+\pi_t)}\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}$$

siendo:

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = (1+\pi_t)$$

Mientras que el último término del Ingreso Nacional Disponible de las Familias representa la pérdida de capital asociada con la variación del tipo de cambio real:

$$\left[\frac{E_t F_{t-1}}{P_t} - \frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}}\right] = \left[\frac{E_t F_{t-1}}{P_t} \cdot \frac{E_{t-1}}{E_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}}\right] = \frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}}\left[\frac{(\gamma_t - \pi_t)}{(1+\pi_t)}\right]$$

donde:

$$\frac{E_t}{E_{t-1}} = (1+\gamma_t) \quad \text{y} \quad \frac{F_t}{F_{t-1}} = (1+g_t)$$

la primer expresión representa la tasa de devaluación de la moneda local respecto a la moneda extranjera, mientras que la segunda refleja la tasa de acumulación de moneda extranjera por parte de las familias. De esta manera, resulta posible re-expresar el ingreso nacional disponible de las familias de la siguiente manera:

$$Y_t - r\frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \left[\frac{(1+g_t)(1+\gamma_t)}{(1+\pi_t)}\right] + \tau N_t - \left[\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)}\right]\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} - \left[\frac{(\gamma_t - \pi_t)}{(1+\pi_t)}\right]\frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}}$$

por lo que agrupando términos obtendremos:

$$Y_t + \tau N_t - \left[\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)}\right]\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} - \left\{\frac{(1+\gamma_t)\left[r(1+g_t)+1\right] - (1+\pi_t)}{(1+\pi_t)}\right\}\frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}} \quad \textbf{(3.1)}$$

Tal como se mencionara en párrafos precedentes, el presente modelo mantendrá la línea analítica Tobin-Sidrauski, donde las familias ahorran una fracción constante del ingreso nacional disponible, el cual, dado el caso de una economía abierta, se aplicará en acumulación de capital, saldos reales y moneda extranjera en términos reales:

$$\Delta K_t + \Delta \frac{M_t}{P_t} + \Delta \frac{E_t F_t}{P_t} =$$

$$= s\left\{ Y_t + \tau N_t - \left[\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)} \right] \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} - \left\{ \frac{(1+\gamma_t)\left[r(1+g_t)+1 \right] - (1+\pi_t)}{(1+\pi_t)} \right\} \frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}} \right\} \quad \textbf{(4)}$$

A su vez, para estudiar el proceso de acumulación y crecimiento resulta necesario expresar la última ecuación en términos per-cápita, por lo que resulta necesario dividir la última ecuación por N_t, lo cual arroja:

$$\frac{\Delta K_t}{N_t} + \left(\Delta \frac{M_t}{P_t} \right) \frac{1}{N_t} + \left(\Delta \frac{E_t F_t}{P_t} \right) \frac{1}{N_t} =$$

$$= s\left\{ \frac{Y_t}{N_t} + \tau - \left[\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)} \right] \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \frac{1}{N_t} - \left\{ \frac{(1+\gamma_t)\left[r(1+g_t)+1 \right] - (1+\pi_t)}{(1+\pi_t)} \right\} \frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}N_t} \right\} \quad \textbf{(4.1)}$$

Respecto al primer término del lado derecho del proceso de acumulación de activos, si tomamos como referencia la variación de la relación capital-trabajo

$$\Delta k_t = k_t - k_{t-1} = \frac{K_t}{N_t} - \frac{K_{t-1}}{N_{t-1}} + \frac{K_{t-1}}{N_t} - \frac{K_{t-1}}{N_t}$$

el mismo puede ser re-expresado como:

$$\frac{\Delta K_t}{N_t} = \Delta k_t + k_{t-1} - \frac{k_{t-1}}{(1+n)} = \Delta k_t + \frac{n k_{t-1}}{(1+n)}$$

Por otra parte, respecto a la variación de los saldos reales en términos per-cápita (segundo término de la expresión), por definición tenemos:

$$\left(\Delta \frac{M_t}{P_t} \right) \frac{1}{N_t} = \frac{1}{N_t} \cdot \left[\frac{M_t}{P_t} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \right] = \left[\frac{1}{N_t} \cdot \frac{M_t}{P_t} - \frac{1}{N_t} \cdot \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \right]$$

A su vez, trabajando sobre la primera parte de la última expresión obtenemos:

$$\frac{1}{N_t} \cdot \frac{M_t}{P_t} = \frac{1}{N_t} \cdot \frac{M_t}{P_t} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{M_{t-1}}{M_{t-1}} = \frac{(1+\theta_t)}{(1+\pi_t)\cdot(1+n)} m_{t-1}$$

donde:

$$\frac{M_t}{M_{t-1}} = (1+\theta_t) \quad \text{y} \quad m_t = \frac{M_t}{P_t \cdot N_t}$$

mientras que trabajando sobre la segunda, llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{1}{N_t} \cdot \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{1}{N_t} \cdot \frac{M_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} = \frac{1}{(1+n)} m_{t-1}$$

Por lo tanto, la expresión que representa el proceso de acumulación de saldos reales en términos per-cápita estará dada por:

$$\left(\Delta \cdot \frac{M_t}{P_t} \right) \frac{1}{N_t} = \frac{(1+\theta_t)}{(1+\pi_t)\cdot(1+n)} m_{t-1} - \frac{1}{(1+n)} m_{t-1} = m_{t-1} \left[\frac{\theta_t - \pi_t}{(1+\pi_t)\cdot(1+n)} \right]$$

Por último, para completar la transformación del lado izquierdo de la ecuación y trabajando sobre el proceso de acumulación de moneda extranjera en términos reales, es posible manipular algebraicamente la expresión:

$$\left(\Delta \frac{E_t F_t}{P_t} \right) \frac{1}{N_t} = \frac{E_t F_t}{P_t N_t} \cdot \frac{E_{t-1}}{E_{t-1}} \cdot \frac{F_{t-1}}{F_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} - \frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}N_t} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}}$$

de modo tal que la misma puede presentarse de la siguiente manera:

$$\left(\Delta\frac{E_tF_t}{P_t}\right)\frac{1}{N_t}=\frac{f_{t-1}\left[(1+\gamma_t)(1+g_t)-(1+\pi_t)\right]}{(1+\pi_t)(1+n)}$$

En cuanto al primer término de la derecha de la ecuación, acorde a los supuestos del modelo de Solow-Swan sabemos que:

$$\frac{Y_t}{N_t}=\frac{Y(K_{t-1},N_t)}{N_t}=Y\left(\frac{K_{t-1}}{N_t},\frac{N_t}{N_t}\right)=Y\left(\frac{K_{t-1}}{N_t},1\right)=\frac{y(k_{t-1})}{(1+n)}$$

A su vez, trabajando sobre la expresión correspondiente al impuesto inflacionario es posible arribar a la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)}\right)\cdot\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\cdot\frac{1}{N_t}=\left(\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)}\right)\cdot\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}}\cdot\frac{1}{N_t}\cdot\frac{N_{t-1}}{N_{t-1}}=\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)(1+n)}m_{t-1}$$

Por último, la pérdida de capital en moneda extranjera puede re-escribirse como:

$$\left\{\frac{(1+\gamma_t)\left[r(1+g_t)+1\right]-(1+\pi_t)}{(1+\pi_t)}\right\}\frac{E_{t-1}F_{t-1}}{P_{t-1}N_t}=\left\{\frac{(1+\gamma_t)\left[r(1+g_t)+1\right]-(1+\pi_t)}{(1+\pi_t)}\right\}\frac{f_{t-1}}{(1+n)}$$

Así, usando los resultados obtenidos, ello nos permite arribar a la siguiente versión de la ecuación de acumulación de la siguiente manera:

$$\Delta k_t+\frac{n}{1+n}k_{t-1}+\left[\frac{(\theta_t-\pi_t)}{(1+\pi_t)(1+n)}\right]m_{t-1}+\left[\frac{(1+\gamma_t)(1+g_t)-(1+\pi_t)}{(1+\pi_t)(1+n)}\right]f_{t-1}=$$

$$=s\left\{\frac{y_t}{(1+n)}+\tau-\left[\frac{\pi_t}{(1+\pi_t)(1+n)}\right]m_{t-1}-\left\{\frac{(1+\gamma_t)\left[r(1+g_t)+1\right]-(1+\pi_t)}{(1+\pi_t)(1+n)}\right\}f_{t-1}\right\} \quad \textbf{(5)}$$

Nótese que dicha expresión es la ecuación equivalente del Solow-Swan para el caso de una economía monetaria abierta con crecimiento. De hecho, si eliminamos de la ecuación las transferencias del gobierno, los saldos reales y las tenencias reales del activo externo obtendremos:

$$\Delta k_t+\frac{nk_{t-1}}{(1+n)}=\frac{sy(k_{t-1})}{(1+n)} \quad \textbf{(6)}$$

Por lo que, despejando el incremento del stock de capital per-cápita es posible arribar a la ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan en términos discretos:

$$\Delta k_t=\frac{1}{(1+n)}\left[sy(k_{t-1})-nk_{t-1}\right] \quad \textbf{(7)}$$

A su vez, dado que en el estado estacionario el capital per-cápita no varía, es posible obtener la condición de equilibrio igualando la última ecuación a cero:

$$\Delta k^*=\frac{1}{(1+n)}\left[sy\left(k^*\right)-nk^*\right]=0 \quad \textbf{(8)}$$

lo cual arroja la ecuación del modelo Solow-Swan sin amortización (ver Apéndice1):

$$sy\left(k^*\right)=nk^* \quad \textbf{(9)}$$

Por otra parte, para evitar lo que se conoce como el segundo problema de Harrod (en la medida que la tasa efectiva de crecimiento de la economía se desvía de la tasa garantizada con el paso del tiempo, dicha desviación tendía a incrementarse en lugar de auto-corregirse) resulta necesario determinar la condición bajo la cual el equilibrio es estable. Dicha condición se alcanzará si la derivada del incremento de la relación capital-trabajo respecto a la relación capital-trabajo es negativa:

$$\frac{\partial\Delta k_t}{\partial k_t}=\frac{1}{(1+n)}\left[sy_k-n\right]<0 \quad \textbf{(10)}$$

lo cual implica:

$$\left[sy_k - n\right] < 0 \quad ; \quad sy_k < n \quad \textbf{(11)}$$

que el producto marginal del capital ponderado por la propensión al ahorro sea menor que la tasa de crecimiento de la población.

3.3. La Política Fiscal

En el presente modelo asumimos que la política fiscal se comporta de manera similar a como lo hace en el modelo Tobin-Sidrauski. Así, la política fiscal consiste en realizar transferencias de sumas fijas entre los agentes de la economía, lo cual representa el gasto del gobierno. Para financiar dicho gasto, el gobierno no cobra ningún impuesto explícito y no se endeuda con el exterior[3], por lo que la brecha de financiamiento se cierra con emisión monetaria:

$$P_t \cdot \tau \cdot N_t = \Delta M_t = \theta_t \cdot M_{t-1} \quad \textbf{(12)}$$

A partir de dicha ecuación es posible despejar la transferencia per-cápita

$$\tau = \frac{\theta_t \cdot M_{t-1}}{P_t \cdot N_t}$$

la cual, luego de manipularla algebraicamente arroja:

$$\tau = \frac{\theta_t \cdot M_{t-1}}{P_t \cdot N_t} = \frac{\theta_t \cdot M_{t-1}}{P_t \cdot N_t} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} = \frac{\theta_t \cdot m_{t-1}}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}$$

Por lo tanto, ahora estamos en condiciones de incorporar la política fiscal dentro de la definición de ingreso disponible:

$$\Delta k_t + \frac{n}{1+n}k_{t-1} + \left[\frac{\left(\theta_t - \pi_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right]m_{t-1} + \left[\frac{\left(1+\gamma_t\right)\left(1+g_t\right) - \left(1+\pi_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right]f_{t-1} =$$

$$= s\left\{\frac{y_t}{\left(1+n\right)} + \left[\frac{\left(\theta_t - \pi_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right]m_{t-1} - \left\{\frac{\left(1+\gamma_t\right)\left[r\left(1+g_t\right)+1\right] - \left(1+\pi_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right\}f_{t-1}\right\} \quad \textbf{(13)}$$

A su vez, distribuyendo ñsò, la ecuación de acumulación adopta la forma:

$$\Delta k_t = \left[\frac{sy_t}{\left(1+n\right)} - \frac{\left(1-s\right)\left(\theta_t - \pi_t\right)m_{t-1}}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{f_{t-1}\left(1+\gamma_t\right)\left\{\left(1+g_t\right) + s\left[1+r\left(1+g_t\right)\right]\right\}}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)} + \frac{\left(1+s\right)f_{t-1}}{\left(1+n\right)} - \frac{nk_{t-1}}{\left(1+n\right)}\right] \quad \textbf{(14)}$$

Nótese nuevamente que dicha expresión, es la ecuación equivalente del Solow-Swan para el caso de una economía monetaria abierta con crecimiento. De hecho, si uno procediera a eliminar la moneda extranjera es posible arribar a la ecuación fundamental del modelo de Tobin-Sidrauski (ver Apéndice 1):

$$\Delta k_t = s\frac{y\left(k_{t-1}\right)}{\left(1+n\right)} - \left(1-s\right)\left[\frac{\left(\theta_t - \pi_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right]m_{t-1} - \frac{n}{1+n}k_{t-1} \quad \textbf{(15)}$$

mientras que si eliminamos el dinero nos depositaría de nuevo en el Solow-Swan:

$$\Delta k_t = s\frac{y\left(k_{t-1}\right)}{\left(1+n\right)} - \frac{n}{1+n}k_{t-1}$$

que evaluando la ecuación en el estado estacionario obtenemos:

---

[3] Este supuesto se hace para evitar las distorsiones que puede causar la política de financiamiento del gobierno sobre la dinámica del tipo de cambio real y el proceso de acumulación, quitándole claridad al análisis sobre la superneutralidad del dinero, sobretodo en un modelo del tipo Solow-Swan que no presenta condición de transversalidad, con los efectos analíticos que ello implica.

$$\Delta k^{*} = \frac{1}{(1+n)}\left[sy\left(k^{*}\right) - nk^{*} \right] = 0$$

$$sy\left(k^{*}\right) = nk^{*}$$

donde esta última ecuación representa la condición de equilibrio del modelo Solow-Swan para el caso donde la tasa de amortización es nula. Por lo tanto, habiendo arribado a esta etapa del análisis, nos encontramos en condiciones de pasar al estudio del equilibrio en el estado estacionario y la superneutralidad del dinero.

4. Estado Estacionario y Superneutralidad del Dinero

4.1. Equilibrio en el Estado Estacionario

El equilibrio en el estado estacionario vendrá dado por una situación donde el capital, los saldos reales y las tenencias reales de moneda extranjera, todos en términos per-cápita, permanecen constantes, lo cual es equivalente a sostener que su incremento a lo largo del tiempo es nulo:

$$\Delta k^{*} = \Delta m^{*} = \Delta f^{*} = 0 \quad \textbf{(16)}$$

Respecto al mercado monetario, partiendo del aumento de los saldos reales tenemos:

$$\Delta m^{*} = m_t - m_{t-1} = \frac{M_t}{P_t \cdot N_t} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} = 0 \quad \textbf{(17)}$$

que luego de manipular algebraicamente:

$$\Delta m^{*} = \frac{M_t}{P_t \cdot N_t} \cdot \frac{M_{t-1}}{M_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} = 0$$

y agrupar términos en base a los saldos reales per-cápita del período precedente:

$$\Delta m^{*} = \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} \cdot \frac{(1+\theta)}{(1+\pi)(1+n)} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} = m_{t-1}\left[\frac{(1+\theta)}{(1+\pi)(1+n)} - 1 \right] = 0$$

nos permite determinar la condición de equilibrio en el estado estacionario

$$\frac{(1+\theta)}{(1+\pi)(1+n)} = 1$$

la cual implica la neutralidad del dinero:

$$(1+\pi) = \frac{(1+\theta)}{(1+n)} \quad \textbf{(18)}$$

Por otra parte, trabajando sobre los activos externos, el proceso de acumulación en términos per-cápita en el estado estacionario puede presentarse como:

$$\Delta f^{*} = f_t - f_{t-1} = \frac{F_t \cdot E_t}{P_t \cdot N_t} - \frac{F_{t-1} \cdot E_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} = 0 \quad \textbf{(19)}$$

donde manipulando algebraicamente y sacando factor común las tenencias de activos externos per-cápita en términos reales

$$\Delta f^{*} = \frac{F_t \cdot E_t}{P_t \cdot N_t} \cdot \frac{F_{t-1}}{F_{t-1}} \cdot \frac{E_{t-1}}{E_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} - \frac{F_{t-1} \cdot E_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} = f_{t-1}\left[\frac{(1+\gamma)(1+g)}{(1+\pi)(1+n)} - 1 \right] = 0$$

nos permite arribar a la siguiente condición de equilibrio para el estado estacionario:

$$\left[\frac{(1+\gamma)(1+g)}{(1+\pi)(1+n)} - 1 \right] = 0$$

lo cual implica que el crecimiento de la posición de activos externos debe ser igual al crecimiento nominal de la economía:

$$\left[\frac{(1+\gamma)(1+g)}{(1+\pi)(1+n)} \right] = 1 \quad \textbf{(20)}$$

A su vez, dado que para el estado estacionario la demanda de activos externos debería estar alineada con el crecimiento de la población (de modo tal que el stock de activos externos per-cápita esté constante), ello implica que:

$$g = n \quad \textbf{(21)}$$

Por lo tanto, en el equilibrio de estado estacionario se verifica la paridad del poder compra en tasas:

$$(1+\gamma) = (1+\pi) = \frac{(1+\theta)}{(1+n)} \quad \textbf{(22)}$$

Esto significa que la tasa de inflación, la cual es determinada por la diferencia entre las tasas de crecimiento de la cantidad de dinero y de la economía, es similar a la tasa de devaluación, por lo que bajo este formato del equilibrio, el tipo de cambio real no varía. Por último, en el mercado bienes, tendremos que el equilibrio de estado estacionario:

$$\Delta k^* = 0 \quad \textbf{(23)}$$

implica:

$$s\frac{y(k^*)}{(1+n)} = (1-s)\left[\frac{(\theta-\pi)}{(1+\pi)(1+n)}\right]m^* + \left[\frac{(1+\gamma)\{(1+g)+s[1+r(1+g)]\}}{(1+\pi)(1+n)}\right]f^* - \frac{(1+s)}{(1+n)}f^* + \left[\frac{n}{(1+n)}\right]k^*$$

lo cual, en función de los resultados obtenidos en la sección 3.2. del trabajo y el cumplimiento de la paridad del poder de compra, es posible re-escribir la ecuación precedente de la siguiente manera:

$$s\frac{y(k^*)}{(1+n)} = (1-s)\left[\frac{n}{(1+n)}\right]m^* + \left[\frac{\{(1+g)+s[1+r(1+g)]\}}{(1+n)}\right]f^* - \left[\frac{(1+s)}{(1+n)}\right]f^* + \left[\frac{n}{(1+n)}\right]k^*$$

Ahora, eliminado el factor de crecimiento de la población en ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$sy(k^*) = (1-s)\cdot n\cdot m^* + \{(1+g)+s[1+r(1+g)]\}\cdot f^* - (1+s)\cdot f^* + n\cdot k^*$$

Así, luego de sacar factor común, es posible arribar a una forma definitiva sobre la ecuación de acumulación de capital per-cápita en el equilibrio de estado estacionario:

$$sy(k^*) = (1-s)\cdot n\cdot m^* + [g + sr(1+g)]\cdot f^* + n\cdot k^* \quad \textbf{(24)}$$

Por lo tanto, habiendo arribado a esta ecuación, ahora estamos en condiciones de analizar los efectos de un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero sobre la relación capital-trabajo de la senda de equilibrio

4.2. La Superneutralidad del Dinero

Para determinar si el dinero resulta o no superneutral y, en caso de no serlo, de que manera afecta al producto per-cápita de largo plazo de la economía, procedemos a diferenciar la ecuación (24) respecto de la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, al tiempo que haciendo uso de la paridad del poder de comprar obtendremos:

$$s\frac{\partial y}{\partial k^*}\frac{\partial k^*}{\partial\theta} = n\cdot(1-s)\frac{\partial m^*}{\partial\theta} + [g + s\cdot r(1+g)]\frac{\partial f^*}{\partial\theta} + n\frac{\partial k^*}{\partial\theta} \quad \textbf{(25)}$$

lo cual es posible reagruparlo de modo tal

$$\left[s\frac{\partial y}{\partial k^*} - n\right]\frac{\partial k^*}{\partial\theta} = n\cdot(1-s)\frac{\partial m^*}{\partial\theta} + [g + s\cdot r(1+g)]\frac{\partial f^*}{\partial\theta} \quad \textbf{(26)}$$

que sea posible despejar como se modifica la relación capital-trabajo ante un aumento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero:

$$\frac{\partial k^*}{\partial\theta} = \frac{\left\{n\cdot(1-s)\frac{\partial m^*}{\partial\theta} + [g + s\cdot r(1+g)]\frac{\partial f^*}{\partial\theta}\right\}}{\left[sy_{k^*} - n\right]} \quad \textbf{(27)}$$

Para determinar el signo de la expresión es necesario determinar tanto el signo del denominador como del numerador. Respecto del primero, a lo igual que el modelo Solow-Swan, la expresión se relaciona con la condición de estabilidad (aunque en este caso está relacionado con el brazo estable del equilibrio de punta de silla):

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial k^*} < 0 \quad \textbf{(28)}$$

Por lo que, el signo del denominador es negativo (ver ecuaciones 10 y 11):

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial k^*} = \left\{ \frac{\left(sy_{k^*} - n\right)}{\left(1+n\right)} \right\} < 0 \quad \textbf{(29)}$$

Por otra parte, el efecto sobre el numerador surge de comparar el impacto sobre la demanda de saldos reales y el proceso de acumulación de activos externos. Si asumimos, solo por simplicidad, que el efecto impacto es similar (aunque con el signo opuesto, esto es, la devaluación esperada reduce la demanda de dinero doméstico a favor de activos externos) sobre los saldos reales y los activos extranjeros, el resultado sobre el nivel de capital per-cápita dependerá del respectivo peso de sus parámetros. Así, desarrollando por el método del absurdo, partimos de la suposición de que los parámetros se igualan:

$$n - n \cdot s = n + s \cdot r + n \cdot s \cdot r$$
$$0 = s \cdot r + n \cdot s \cdot r + n \cdot s$$

Sin embargo, esta relación solamente sería verdadera si:

$$s = r = n = 0$$

lo cual implica una contradicción con los supuestos utilizados. Así, el numerador de la expresión es positivo:

$$n - n \cdot s < n + s \cdot r + n \cdot s \cdot r$$

y por ende la derivada en cuestión (ecuación 27) presenta un signo negativo:

$$\frac{\partial k^*}{\partial \theta} = \frac{\left\{ n \cdot \left(1-s\right) \dfrac{\partial m^*}{\partial \theta} + \left[g + s \cdot r \left(1+g\right) \right] \dfrac{\partial f^*}{\partial \theta} \right\}}{\left[sy_{k^*} - n \right]} < 0 \quad \textbf{(30)}$$

Por lo tanto, el dinero, no solo no es superneutral sino que en contradicción a la teoría convencional (ver Apéndice 2), el incremento en la cantidad de dinero reduce el stock de capital per-cápita y con ello el producto per-cápita.

4.3. La Dinámica Transicional

Para estudiar el comportamiento de esta pequeña economía monetaria abierta en la transición dinámica bajo la estructura desarrollada en los apartados precedentes, se presenta el sistema de ecuaciones en diferencias autónomo emergente:

$$\begin{bmatrix} k_t \\ m_t \\ f_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left[\dfrac{\left(1+2n\right)}{\left(1+n\right)}\right] & -\left[\dfrac{\left(1-s\right)\left(\theta_t - \pi_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right] & X \\ 0 & \left[\dfrac{\left(1+\theta_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[\dfrac{\left(1+\gamma_t\right)\left(1+g_t\right)}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{t-1} \\ m_{t-1} \\ f_{t-1} \end{bmatrix}$$

donde:

$$X = \left[\frac{\left(1+s\right)\left(1+\pi_t\right) - \left(1+\gamma_t\right)\left\{\left(1+g_t\right) + s\left[1 + r\left(1+g_t\right)\right]\right\}}{\left(1+\pi_t\right)\left(1+n\right)} \right]$$

Dicho sistema constituye un bloque diagonal, donde el determinante del Jacobiano tiene signo negativo, por lo que más allá del valor de la traza, el equilibrio es un ῥpunto de silla». A su vez, el sistema tiene una raíz que es negativa (la relacionada con el stock de capital per-cápita), mientras que dos son positivas. Así, el nivel de precios y el tipo de cambio nominal deben pegar saltos discretos (lo cual implica un salto en el tipo de cambio real de equilibrio de largo plazo) de modo tal que la economía bajo estudio se ubique en el sendero estable del punto de silla. Más allá de su formato matemático, la intuición detrás del proceso es muy simple. El incremento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, dada la neutralidad del mismo implica que aumentará la tasa de inflación, lo cual infringirá una pérdida de capital sobre los saldos reales. A su vez, por la paridad del poder compra los agentes saben que el tipo de cambio nominal aumentará. A partir de dichos efectos los agentes reducen la demanda de dinero y aumentan la demanda de moneda extranjera. Sin embargo, el proceso implica que en la transición el tipo de cambio real salte para equilibrar el mercado de divisas, lo cual hace que el rendimiento relativo del capital sea menor que el de la moneda extranjera, por lo que también se demanda menos capital a favor del activo foráneo. De esta manera, el capital per-cápita se reduce y con ello el producto per-cápita también. Consecuentemente, si bien en el equilibrio de estado estacionario el dinero es neutral y se cumple la paridad del poder de compra, el dinero no es superneutral en un sentido negativo, ya que mayores tasas de crecimiento de la cantidad de dinero derivan en un menor producto per-cápita.

5. Dinero, Overshooting y Crecimiento

En función de lo desarrollado en los apartados 3 y 4, al tiempo que (haciendo uso de la Ley de Walras) omitimos el mercado monetario, es posible analizar la dinámica de corto plazo del sistema (lo cual permitirá ver con claridad los resultados del análisis de la dinámica transicional) ante variaciones de la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. En función de ello, en esta sección planteamos la evolución dinámica del stock de capital per-cápita y del tipo de cambio real, cuyo sistema asociado vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} \Delta k \\ \Delta e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k & f_e \\ g_k & g_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(k-\overline{k}\right) \\ \left(e-\overline{e}\right) \end{bmatrix} \quad \textbf{(31)}$$

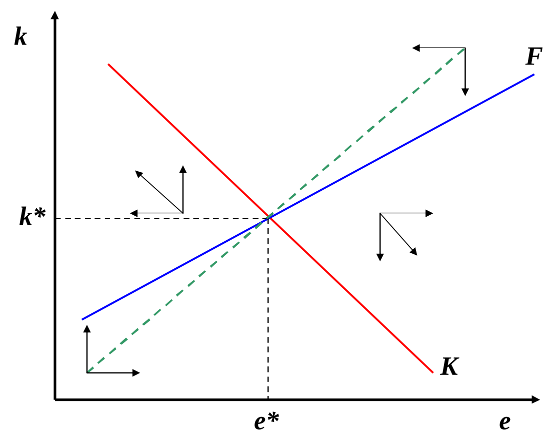
Respecto a los signos del Jacobiano, en función de los resultados obtenidos a lo largo del presente trabajo sabemos que todos los elementos de la matriz, salvo por la relación funcional entre el exceso de demanda de activos externo y el tipo de cambio real esperado que tiene signo positivo (el aumento esperado del tipo de cambio real conlleva a un aumento de la demanda de activos externos para evitar una pérdida de riqueza por parte de los agentes), todos los restantes elementos tienen signo negativo. De esta manera, el signo del determinante del Jacobiano es negativo:

$$\left[J\right] = \begin{bmatrix} f_k & f_e \\ g_k & g_e \end{bmatrix} < 0 \quad \textbf{(32)}$$

Por lo que independientemente del valor que adopte la traza de la misma matriz, nos encontramos frente a un equilibrio de los que se denominan punto de silla (esto no debería llamar la atención ya que en el punto 4.3 –sección precedente- se demostró que el equilibrio emergente se corresponde con el mismo tipo).

En cuanto al fundamento económico de cada una de las relaciones funcionales que se hallan en el Jacobiano es posible señalar lo siguiente: (i) el signo negativo entre la acumulación de capital físico y capital (más allá de que asegura la estabilidad en el mercado de bienes y es lo que evita que el modelo se torne inestable totalmente) se debe a que cuanto mayor el stock de capital per-cápita menor su producto marginal (por ende menor su retorno) por lo que los incentivos a invertir en activos físicos cae, (ii) a su vez, respecto a la relación negativa entre el stock de capital per-cápita y el tipo de cambio real esperado se deriva del hecho de que el salto en la última, ante una mayor tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, la moneda extranjera genera mayor protección frente a la pérdida monetaria derivada de la mayor tasa de inflación y, (iii) respecto al último signo, más allá de que conceptualmente este se vincula al punto recién mencionado, en el fondo lo que está aplicando no es mas ni menos que la restricción presupuestaria. Por lo tanto, con este conjunto de elementos es posible representar gráficamente este equilibrio de la siguiente manera (Gráfico 1):

Gráfico 1: Configuración y Determinación del Equilibrio (Punto de Silla)



En el Gráfico 1 es posible observar que la demanda de capital per-cápita, curva K, se relaciona negativamente con el tipo de cambio real, lo cual obedece al hecho de que cuanto mayor el tipo de cambio real esperado, los agentes para protegerse de la inflación no solo salen de la posición en dinero sino que dado el salto en el precio relativo de la divisa también les resulta conveniente acumular menor capital físico a favor de los activos de origen externo. Por otra parte, la curva F, la cual determina las combinaciones de stock de capital per-cápita y tipo de cambio real esperado que deja en equilibrio el mercado de divisas tiene pendiente positiva, donde como cabría de esperar en términos intuitivos, si se cree que el precio relativo de un activo subirá es propio que su demanda también lo haga.

Por lo tanto, habiendo estudiado la configuración del equilibrio, tanto en términos analíticos como gráficos, podemos pasar a estudiar los efectos sobre la acumulación de capital per-cápita y el tipo de cambio real, ante una mayor tasa de crecimiento de la cantidad de dinero. Para ello procedemos a diferenciar el sistema respecto a la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero:

$$\frac{\partial f}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \theta}-f_\theta=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \theta}+\frac{\partial g}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial \theta}-g_\theta=0$$

lo cual puede expresarse matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_k & f_e \\ g_k & g_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial k}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial e}{\partial \theta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_\theta \\ g_\theta \end{bmatrix} \quad \textbf{(33)}$$

Por lo tanto, aplicando la Regla de Cramer, es posible determinar la variación del stock de capital per-cápita:

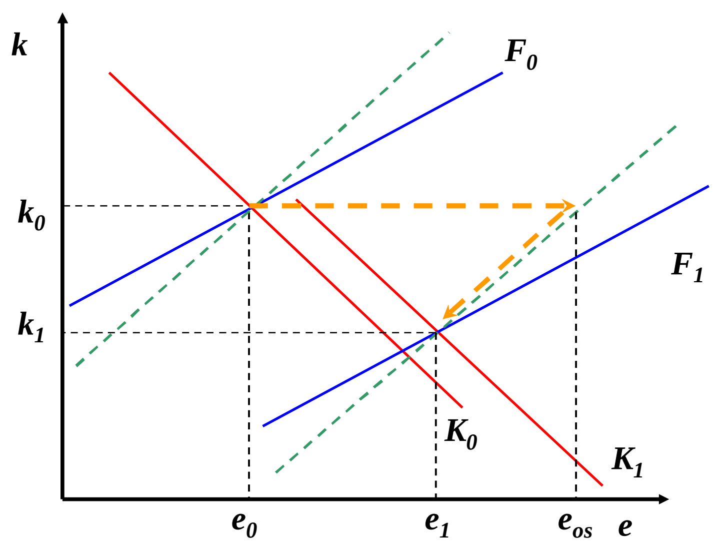
$$\frac{\partial k}{\partial \theta}=\frac{\begin{bmatrix} f_\theta & f_e \\ g_\theta & g_e \end{bmatrix}}{\Delta}=\frac{f_\theta . g_e - g_\theta . f_e}{\Delta}<0 \quad \textbf{(34)}$$

y del tipo de cambio real, ante una mayor tasa de creación de dinero:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{\begin{bmatrix} f_k & f_\theta \\ g_k & g_\theta \end{bmatrix}}{\Delta} = \frac{f_k . g_\theta - g_k . f_\theta}{\Delta} > 0 \quad \textbf{(35)}$$

Así, cuando la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero aumenta se produce una caída del stock de capital per-cápita (ec. 34), mientras que el tipo de cambio real aumenta (ec. 35). La intuición detrás del resultado señala que cuando el Banco Central decide aumenta la tasa de creación de dinero, ello tiene como correlato un aumento de la tasa de inflación y un aumento del tipo de cambio nominal. Sin embargo, cuando este aumento tiene lugar se produce una caída en la demanda de dinero, pero en dicho proceso el tipo de cambio real debe saltar para equilibrar la mayor demanda de divisas, por lo que el rendimiento de la moneda extranjera domina al de los bienes, por lo que también termina cayendo la acumulación de capital en términos per-cápita. Este resultado puede observarse en el Gráfico 2, donde ante una mayor tasa de crecimiento en la cantidad de dinero, el nuevo equilibrio se corresponde con un menor nivel de capital per-cápita y un mayor tipo de cambio real.

Gráfico 2: Efecto de un Aumento en la Tasa de Creación de Dinero



Ciertamente, aun cuando el resultado final es claro, la forma en la que se llega a éste no es trivial. Si bien, en el nuevo equilibrio, el stock de capital per-cápita debe caer, el hecho de que la tasa de amortización no sea del ciento por ciento (único caso donde se pasaría de manera instantánea de un punto de equilibrio a otro) establece una rigidez en la forma que ajusta dicha variable que conlleva a una sobre-reacción de la otra (overshooting en el tipo de cambio real). En la figura se muestra el caso extremo (acorde a lo desarrollado en el presente trabajo) donde la tasa de amortización es nula. De esta manera cuando la mayor tasa de crecimiento de la cantidad de dinero exige una caída del stock de capital per-cápita, como se asume una amortización nula, esto hace que en el corto plazo dicha variable permanezca constante, lo cual conlleva a una sobre-reacción del tipo de cambio real para equilibrar el mercado de divisas. Sin embargo, en la medida que el paso del tiempo transcurre y dada la tasa de crecimiento de la población, la relación comienza a bajar. A su vez, como ello implica un menor crecimiento de la oferta de bienes respecto de su demanda la contrapartida es una mayor tasa de inflación que va licuando el mayor tipo de cambio real.

6. Conclusiones

Los modelos monetarios de crecimiento se distinguen por dos tipos de supuestos. El primero se refiere a la dinámica de ajuste del nivel de precios, mientras que el segundo punto versa sobre las distintas teorías acerca el ahorro y el papel que desempeña el dinero en la economía. Respecto al presente trabajo, el mismo está en la línea seguida por Tobin-Sidrauski, donde el nivel de precios se ajusta de modo tal que permita asegurar el equilibrio en el mercado monetario, mientras que el ahorro está en función del ingreso disponible. Sin embargo, pese a las similitudes con los modelos de referencia y la coincidencia acerca de la ausencia de superneutralidad del dinero, el resultado final respecto al capital y al producto ï ambos en términos per-cápita- se halla en las antípodas. Así, mientras que en los primeros el dinero no es superneutral en un sentido positivo, en el presente no lo es en un sentido negativo.

En el Tobin-Sidrauski cuando se incrementa la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, dada la tasa de crecimiento de la economía, implica un aumento de la inflación y con ello el dinero se vuelve menos atractivo respecto al capital. Así, los agentes acumularían una mayor cantidad de capital físico, incrementando la relación capital-trabajo y con ello, el producto per-cápita.

En el presente modelo, el incremento en la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero conlleva a un aumento de las tasas de inflación y de devaluación. A partir de dichos efectos, los agentes reducirán la demanda de dinero a favor de la demanda de moneda extranjera. Sin embargo, al generarse el salto en el nivel de precios que mantienen a la economía en el brazo estable, el tipo de cambio real salta para equilibrar el mercado de divisas, haciendo ello que el rendimiento relativo del capital sea menor que el de la moneda extranjera, por lo que también se demanda menos capital a favor del activo foráneo. De esta manera, el capital per-cápita se reduce y con ello el producto per-cápita también. Por lo tanto, el dinero no es superneutral en un sentido negativo, ya que mayores tasas de crecimiento de la cantidad de dinero derivan en un menor producto per-cápita.

Adicionalmente, también se estudió el fenómeno del overshooting del tipo de cambio real. Para ello se procede a estudiar el comportamiento del stock de capital en términos per-cápita y el tipo de cambio real ante variaciones en la tasa de crecimiento en la cantidad de dinero. En dicho estudio se demuestra que si bien, en el nuevo equilibrio, el stock de capital per-cápita debe caer, el hecho de que la tasa de amortización no sea del ciento por ciento (único caso donde se pasaría de manera instantánea de un punto de equilibrio a otro) establece una rigidez en la forma que ajusta dicha variable que conlleva a una sobre-reacción de la otra (overshooting en el tipo de cambio real). De esta manera cuando la mayor tasa de crecimiento de la cantidad de dinero exige una caída del stock de capital per-cápita, como se asume una amortización nula (acorde a los supuestos utilizados a lo largo de todo el trabajo), esto hace que en el corto plazo dicha variable permanezca constante, lo cual conlleva a una sobre-reacción del tipo de cambio real para equilibrar el mercado de divisas. Sin embargo, en la medida que transcurre el paso del tiempo y dada la tasa de crecimiento de la población, la relación comienza a bajar. A su vez, como ello implica un menor crecimiento de la oferta de bienes respecto de su demanda la contrapartida es una mayor tasa de inflación que va licuando el mayor tipo de cambio real.

Por lo tanto, las consecuencias para el diseño de la política monetario no son menores, ya que la determinación de la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero tendrá efectos reales, esto es el dinero no es superneutral y en el caso especial del presente trabajo lo es de manera negativa. A su vez, los resultados acerca de cómo se comportan las variables en la transición dinámica no son menores, ya que el fenómeno del overshooting puede generar ciertos trastornos al momento de reducir la tasa de inflación de la economía. Así, si bien en el nuevo equilibrio el stock de capital per-cápita y con ello el producto per-cápita será mayor, el overshooting hará caer el tipo de cambio real de manera exagerada por lo que si los precios muestran cierta rigidez a la baja pueden generar desempleo elevado y estrangulamiento en el sector externo.

7. Bibliografía

1. Blanchard, O. y Fisher, S. (1989): ñLecture on MacroeconomicsòMIT Press
2. Brock, W. (1974): ñMoney and Growth: The Case of Perfect Foresightò, IER 15, pp. 750-777
3. Crosby, M. y Otto, G. (2000): ñInflation and the Capital Stockò, JMCB, Vol. 32, Nº 2, pp. 236-253
4. de Pablo, J.C. (1980):òNeutralidad del Dinero en Modelos de Crecimiento con Dineroò, Económica de La Plata, Nros. 1 y 2
5. Domar, E. (1958): ñCapital Expansion, Rate of Growth and Employmentò, Econometrica
6. Dornbusch, R (1976): ñExpectations and Exchange Rate Dynamicsò, JPE, Vol. 84 Nº 6, pp. 1161-1176
7. Dornbusch, R. y Frenkel, J. (1973): ñInflation and Growthò, JMCB, vol. V, Part I.
8. Fisher, I. (1930): ñThe Theory of Interestò, New York
9. Fisher, S. (1972): ñKeynes-Wicksell and Neoclassical Models of Money and Growthò, AER, Dec. Vol. 62 Nº 5, pp. 880-890
10. Fisher, S. (1979): ñCapital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Modelò, Econometrica, Nov. Vol. 47 Nº 6, pp. 1433-39
11. Foley, D. Shell, K. y Sidrauski, M. (1969): ñOptimal Fiscal and Monetary Policy and Economic Growthò, JPE, Vol. 77. Nº 4, pp. 698-719
12. Foley, D. y Sidrauski, M. (1970): ñPortfolio Choice, Investment and Growthò, AER, Vol. 60. Nº 1, pp. 44-63
13. Gurley, J. y Shaw, E. (1960): ñMoney in a Theory of Finance, with a Mathematical Appendix by A.C. Enthovenò, Washington
14. Harrod, R. (1939): ñAn Essay in Dynamic Theoryò, EJ
15. Harrod, R. (1960): ñSecond Essay in Dynamic Theoryò, EJ
16. Johnson, H. (1962): ñMonetary Theory and Policyò, AER (June)
17. Johnson, H. (1966): ñThe Neo-Classical One Sector Growth Model, A Geometrical Exposition and Extension to a Monetary Economyòò, Eco. (Aug).
18. Ireland, P. (1994): ñMoney and Growth: An Alternative Approachò, AER, Vol. 84, Nº 1, pp. 47-65
19. Levhari, D. y Patinkin, D. (1968): ñThe Role of Money in a Simple Growth Modelò, AER (Sept.)
20. Marty, A. (1968): ñThe Optimal Rate of Growth of Moneyò, JPE, Part II (July/Aug)
21. Milei, J. (2007): ñCuarenta años de óRational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economyô de Miguel Sidrauskiò, 42º Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política, Bahía Blanca
22. Patinkin, D. (1956): ñMoney, Interest and Pricesò, Row-Petersen
23. Ramsey, F. (1928): ñA Mathematical Theory of Savingò, EF
24. Robinson, J. (1956): ñThe Accumulation of Capitalò, Macmillan, (version en español FCE)
25. Sala-i-Martin (2000):òApuntes de Crecimiento Económicoò2ª Ed. Antoni Bosch
26. Shell, K., Sidrauski, M. y Stiglitz, J. (1969): ñCapital Gains, Income and Savingò RES, Vol. 36, Nº 1 (Jan.), pp. 15-26
27. Sidrauski, M (1967.a): ñRational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economyò, AER (May)
28. Sidrauski, M (1967.b): ñInflation and Economic Growthò, JPE (Dec)
29. Solow, R. (1956): ñA Contribution to the Theory of Economic Growthò, QJE
30. Swan, T. (1956): ñEconomic Growth and Capital AccumulationòTER
31. Tobin, J. (1965): ñMoney and Economic Growthò, Econometrica (Oct)
32. Walsh, C. (1998): ñMonetary Theory and Policyò, MIT Press
33. Wang, P. y Chong K. Y. (1992): ñAlternatives Approaches to Money and Growthò, JMCB, Vol. 24, Nº 4, pp. 553-562

APÉNDICE 1: El Modelo de Solow-Swan (Versión Discreta)

La explicación de la naturaleza y causas del crecimiento ya se encontraba presente en los aportes realizados por Adam Smith, David Ricardo, Karl Marx y, ya en el siglo XX, en el trabajo de Schumpeter denominado como ñdinámica magnaò. Sin embargo, la modelización del crecimiento debió esperar hasta finales de la década del ô30. Los pioneros trabajos de Harrod (1939), al que siguieron las aportaciones de Domar (1946), marcaban el inicio del interés por las teorías modernas de crecimiento. El enfoque de Harrod-Domar sobre el crecimiento era específicamente keynesiano, tanto en lo que se refiere al espíritu de su concepción como a los detalles de su ejecución y su objetivo estaba centrado en la determinación de las condiciones necesarias para conseguir el equilibrio entre el ahorro y la inversión en una economía dinámica. Sin embargo, los tres elementos que ingresaban en la determinación del sendero de crecimiento equilibrado (propensión marginal al ahorro, tasa de crecimiento de la población y relación capital-producto en una función de producción de proporciones fijas) eran exógenos, por lo cual tal ñEdad de Oroò era absolutamente improbable (Joan Robinson 1956).

Para solucionar dicho problema solo existía una salida. Por lo menos uno de los tres conceptos tenía que ser, no una constante dada, sino una variable capaz de recibir una gama de valores suficientemente amplia tal que ello bastara para establecer la mera posibilidad de un crecimiento estable. Así las cosas, para asegurar que la economía transitara por la vía del crecimiento equilibrado y sostenible, Solow (1956) y Swan (1956) optaron por hacer variable la relación capital-producto, dejando constante, tanto la tasa de crecimiento de la población como la propensión marginal al ahorro. En función de ello, los mencionados autores tomaron como punto de partida la función de producción neoclásica, la cual presenta como sus argumentos al stock de capital del período anterior (K_{t-1}) y al trabajo utilizado en el momento presente (N_t):

$$Y_t = F\left(K_{t-1}, N_t\right)$$

la cual presenta las siguientes propiedades:

(iv) rendimientos constantes a escala

$$F\left(\lambda K_{t-1}, \lambda N_t\right) = \lambda F\left(K_{t-1}, N_t\right)$$

(v) productividad marginal de los factores positiva, pero decreciente

$$\frac{\partial F}{\partial K_{t-1}} > 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial N_t} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K_{t-1}^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial N_t^2} < 0$$

(vi) cumplimiento de las condiciones de Inada

$$\lim_{K_{t-1}\to\infty} \frac{\partial F}{\partial K_{t-1}} = \lim_{N_t\to\infty} \frac{\partial F}{\partial N_t} = 0$$

$$\lim_{K_{t-1}\to 0} \frac{\partial F}{\partial K_{t-1}} = \lim_{N_t\to 0} \frac{\partial F}{\partial N_t} = \infty$$

Por otra parte, dado que se asume que no existe Gobierno, la demanda esta determinada por la suma del consumo (C_t) y de la inversión privada (I_t), al tiempo que dicha suma se iguala al producto para la determinación del equilibrio en el mercado de bienes:

$$F\left(K_{t-1}, N_t\right) = C_t + I_t$$

$$F\left(K_{t-1}, N_t\right) - C_t = S_t = I_t$$

Respecto al ahorro (S_t), acorde a la línea keynesiana, la propensión media y marginal es constante, con lo que el ahorro será una fracción constante del ingreso:

$$S_t = sY_t = sF\left(K_{t-1}, N_t\right) = I_t$$

A su vez, asumiendo una tasa de depreciación constante (δ):

$$D_t = \delta K_{t-1}$$

la inversión bruta vendrá dada por la siguiente expresión:

$$I_t = \Delta K_t + \delta K_{t-1}$$

En función de los supuestos mencionados, la condición de equilibrio en el mercado de bienes puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$F\left(K_{t-1}, N_t\right) = C_t + I_t = (1-s)F\left(K_{t-1}, N_t\right) + \Delta K_t + \delta K_{t-1}$$

Por lo tanto, como paso previo a la derivación de la ecuación fundamental, ahora es posible presentar toda la expresión en términos de la variación temporal del capital, lo cual estaría dado por:

$$\Delta K_t = F\left(K_{t-1}, N_t\right) - (1-s)F\left(K_{t-1}, N_t\right) - \delta K_{t-1}$$

$$\Delta K_t = sF\left(K_{t-1}, N_t\right) - \delta K_{t-1}$$

Por último, para llegar a la ecuación de acumulación resulta necesario expresar la ecuación en términos de la relación capital-trabajo, por lo que debemos dividir ambos miembros por la cantidad de trabajo del período:

$$\frac{\Delta K_t}{N_t} = \frac{sF\left(K_{t-1}, N_t\right)}{N_t} - \frac{\delta K_{t-1}}{N_t}$$

Donde asumiendo una tasa de crecimiento de la población constante (*n*):

$$\frac{N_t}{N_{t-1}} = (1+n)$$

Y considerando las expresiones en términos per-cápita:

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{N_t} \ , \ c_t \equiv \frac{C_t}{N_t} \ , \ k_t \equiv \frac{K_t}{N_t} \ ,$$

La variación de la relación capital trabajo estará dada por:

$$\Delta k_t = k_t - k_{t-1} = \frac{K_t}{N_t} - \frac{K_{t-1}}{N_{t-1}} + \frac{K_{t-1}}{N_t} - \frac{K_{t-1}}{N_t}$$

$$\frac{\Delta K_t}{N_t} = \Delta k_t + k_{t-1} - \frac{k_{t-1}}{(1+n)} = \Delta k_t + \frac{nk_{t-1}}{(1+n)}$$

Lo cual nos permite reemplazar esta expresión por el primer término de la ecuación de acumulación. Por otra parte, el primer término de la derecha, dado el supuesto de homogeneidad lineal, nos permite re-escribir al mismo como:

$$\frac{sF\left(K_{t-1}, N_t\right)}{N_t} = sF\left(\frac{K_{t-1}}{N_t}, \frac{N_t}{N_t}\right) = sF\left(\frac{K_{t-1}}{N_t}, 1\right) = \frac{sf\left(k_{t-1}\right)}{(1+n)}$$

mientras que para el segundo término de la derecha tenemos:

$$\frac{\delta K_{t-1}}{N_t} = \frac{\delta K_{t-1}}{N_t} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} = \frac{\delta k_{t-1}}{(1+n)}$$

Por lo tanto, a partir de las nuevas expresiones para los diferentes miembros de la ecuación, reemplazando obtendremos:

$$\Delta k_t + \frac{nk_{t-1}}{(1+n)} = \frac{sf\left(k_{t-1}\right)}{(1+n)} - \frac{\delta k_{t-1}}{(1+n)}$$

Así, despejando el incremento del stock de capital per-cápita es posible arribar a la ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan en términos discretos:

$$\Delta k_t = \frac{1}{(1+n)}\left[sf\left(k_{t-1}\right) - (\delta + n)k_{t-1} \right]$$

Dado que en el estado estacionario el capital per-cápita permanece invariante, es posible obtener la condición de equilibrio igualando la última ecuación a cero:

$$\Delta k^* = \frac{1}{(1+n)}\left[sf\left(k^*\right) - (\delta + n)k^* \right] = 0$$

$$sf\left(k^*\right) = (\delta + n)k^*$$

A su vez, para evitar lo que se conoce como el segundo problema de Harrod (en la medida que la tasa efectiva de crecimiento de la economía se desvía de la tasa garantizada, con el paso del tiempo, dicha desviación tendía a incrementarse en lugar de auto-corregirse) resulta necesario determinar la condición bajo la cual el equilibrio es estable. Dicha condición se alcanzará si la derivada del incremento de la relación capital-trabajo respecto a la relación capital-trabajo es negativa:

$$\frac{\partial \Delta k_t}{\partial k_t} = \frac{1}{(1+n)}\left[sf_k - (\delta + n) \right] < 0$$

lo cual implica:

$$\left[sf_k - (\delta + n) \right] < 0$$

$$sf_k < (\delta + n)$$

que el producto marginal del capital ponderado por la propensión al ahorro sea menor que la suma de la tasa de depreciación mas la tasa de crecimiento de la población. Por lo tanto, habiendo analizado la determinación del equilibrio y la condición para que el mismo sea estable, estamos en condiciones de pasar a estudiar el modelo Tobin-Sidrauski y como el mismo modifica al Solow-Swan para el caso en que existe dinero y como la presencia de éste puede afectar tanto al equilibrio como a su trayectoria.

APÉNDICE 2: Ausencia de Superneutralidad en el Modelo Tobin-Sidrauski

A.1. La Ecuación de Acumulación

Para analizar la no existencia de superneutralidad del dinero en el modelo de Tobin-Sidrauski, debemos partir de la ecuación de acumulación para una economía cerrada con dinero, donde dicha ecuación de acumulación adopta la forma (ver página 8):

$$\Delta k_t = s\frac{y\left(k_{t-1}\right)}{(1+n)} - (1-s)\left[\frac{(\theta_t - \pi_t)}{(1+\pi_t)(1+n)} \right] m_{t-1} - \frac{n}{1+n}k_{t-1} \quad \textbf{(A.1)}$$

Tal como fuera explicitado en el cuerpo principal del trabajo, dicha expresión es la ecuación equivalente del Solow-Swan para el caso de una economía monetaria con crecimiento. Por lo tanto, habiendo arribado a esta etapa del análisis, nos encontramos en condiciones de pasar al estudio del equilibrio en el estado estacionario y la superneutralidad del dinero en una economía cerrada.

A.2. Estado Estacionario y Superneutralidad del Dinero

El equilibrio en el estado estacionario vendrá dado por una situación donde tanto el capital como los saldos reales, ambos en términos per-cápita, permanecen constantes:

$$\Delta k^* = \Delta m^* = 0 \quad \textbf{(A.2)}$$

Respecto a la condición en el mercado monetario, la misma puede expresarse como:

$$\Delta m^* = m_t - m_{t-1} = \frac{M_t}{P_t \cdot N_t} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} = 0 \quad \textbf{(A.3)}$$

donde trabajando sobre el primer término de la expresión

$$\Delta m^* = \frac{M_t}{P_t \cdot N_t} \cdot \frac{M_{t-1}}{M_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{N_{t-1}}{N_{t-1}} - \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} \cdot N_{t-1}} = 0$$

y reemplazando por las correspondientes tasas de crecimiento obtenemos:

$$\Delta m^{*}=\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}\cdot N_{t-1}}\cdot\frac{(1+\theta)}{(1+\pi)(1+n)}-\frac{M_{t-1}}{P_{t-1}\cdot N_{t-1}}=m_{t-1}\left[\frac{(1+\theta)}{(1+\pi)(1+n)}-1\right]=0$$

Por lo que en el equilibrio de estado estacionario, la tasa a la que crece la cantidad de dinero divida por el producto entre la tasa de inflación y el crecimiento de la población deben ser iguales a uno:

$$\frac{(1+\theta)}{(1+\pi)(1+n)}=1$$

Ello implica que la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero es igual a la tasa de crecimiento del producto nominal, lo cual implica que la tasa de inflación está dada por la tasa de creación de dinero neta del crecimiento de la economía:

$$(1+\pi)=\frac{(1+\theta)}{(1+n)} \quad \textbf{(A.4)}$$

Por lo tanto, en el presente modelo el dinero es neutral.

A su vez, respecto al proceso de acumulación de capital tenemos:

$$\Delta k^{*}=0 \quad \textbf{(A.5)}$$

lo cual, dentro de la ecuación de acumulación de capital implica:

$$s\frac{y(k^{*})}{(1+n)}=(1-s)\left[\frac{(\theta-\pi)}{(1+\pi)(1+n)}\right]m^{*}+\left[\frac{n}{(1+n)}\right]k^{*} \quad \textbf{(A.6)}$$

A su vez, a partir del resultado sobre la de neutralidad del dinero, tenemos que:

$$\frac{(\theta-\pi)}{(1+\pi)(1+n)}=\frac{n}{(1+n)} \quad \textbf{(A.7)}$$

por lo que la ecuación de acumulación puede ser transformada de la siguiente forma:

$$s\frac{y(k^{*})}{(1+n)}=(1-s)\left[\frac{n}{(1+n)}\right]m^{*}+\left[\frac{n}{(1+n)}\right]k^{*}$$

donde resulta posible eliminar el factor de crecimiento de la población:

$$s\cdot y(k^{*})=(1-s)\cdot n\cdot m^{*}+n\cdot k^{*} \quad \textbf{(A.8)}$$

Supongamos ahora que existe una relación funcional ñφò la cual surge del cociente entre los saldos reales y capital, ambos en términos per-cápita:

$$\phi\left(\frac{m^{*}}{k^{*}}\right) \quad \textbf{(A.9)}$$

donde dicha relación define la elección de cartera de los agentes en función de la tasa de inflación. En cuanto a la relación con la tasa de inflación se supone que su derivada es negativa, ya que cuando se incrementa la tasa de inflación eso hace que la tasa de interés nominal aumente y con ello la demanda de dinero caiga para evitar la pérdida de capital, por lo que la expresión se reduce a:

$$\partial\phi\left(\frac{m^{*}}{k^{*}}\right)\Big/\partial\pi<0 \quad \textbf{(A.10)}$$

Por lo tanto, para incorporar esta relación de portafolio dentro de la última versión de la ecuación de acumulación, en el primer término del lado derecho de la misma multiplicamos arriba y abajo por el stock de capital per-cápita:

$$s\cdot y(k^{*})=n\cdot(1-s)\cdot\frac{m^{*}}{k^{*}}\cdot k^{*}+n\cdot k^{*} \quad \textbf{(A.11)}$$

Por lo que ahora es posible expresar la ecuación incorporando la relación funcional del portafolio, que luego de sacar factor común arroja nuestra expresión definitiva para la ecuación de acumulación:

$$s \cdot y\left(k^*\right) = n \cdot k^* \left[\left(1-s\right)\phi + 1\right] \quad \textbf{(A.12)}$$

Por lo tanto, para estudiar si en este modelo el dinero es superneutral procedemos a diferenciar dicha ecuación respecto de ϕ:

$$s \frac{\partial y}{\partial k^*} \frac{\partial k^*}{\partial \phi} = n \frac{\partial k^*}{\partial \phi} \left(1-s\right)\phi + nk^* \left(1-s\right) + n \frac{\partial k^*}{\partial \phi} \quad \textbf{(A.13)}$$

Lo cual puede ser re-expresado de la siguiente manera:

$$sy_{k^*} \frac{\partial k^*}{\partial \phi} = n\left(1-s\right)k^* + n\left[\left(1-s\right)\phi + 1\right] \frac{\partial k^*}{\partial \phi}$$

Ahora, pasando de lado el segundo miembro de la derecha de la ecuación

$$sy_{k^*} \frac{\partial k^*}{\partial \phi} - n\left[\left(1-s\right)\phi + 1\right] \frac{\partial k^*}{\partial \phi} = n\left(1-s\right)k^*$$

y sacando factor común la derivada de la relación capital-trabajo respecto de ϕ:

$$\left\{sy_{k^*} - n\left[\left(1-s\right)\phi + 1\right]\right\} \frac{\partial k^*}{\partial \phi} = n\left(1-s\right)k^* \quad \textbf{(A.14)}$$

es posible arribar a una expresión que describe como se modifica la relación capital-trabajo respecto a cambios de ϕ:

$$\frac{\partial k^*}{\partial \phi} = \frac{n\left(1-s\right)k^*}{\left\{sy_{k^*} - n\left[\left(1-s\right)\phi + 1\right]\right\}} \quad \textbf{(A.15)}$$

Dado que el numerador es positivo, resulta fundamental para determinar el signo de la derivada el signo del denominador. Para ello, si computamos la condición para la estabilidad del modelo:

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial k^*} < 0 \quad \textbf{(A.16)}$$

Sabremos que la misma condición que hace al modelo estable:

$$\frac{\partial \Delta k}{\partial k^*} = \left\{sy_{k^*} - n\left[\left(1-s\right)\phi + 1\right]\right\} < 0 \quad \textbf{(A.17)}$$

es la que determina que la derivada en cuestión es negativa.

$$\frac{\partial k^*}{\partial \phi} = \frac{n\left(1-s\right)k^*}{\left\{sy_{k^*} - n\left[\left(1-s\right)\phi + 1\right]\right\}} < 0 \quad \textbf{(A.18)}$$

Por lo tanto, en función de dicha derivada, podemos afirmar que en el presente modelo que si bien el dinero es neutral, en términos de tasas no es superneutral. Este resultado se deriva fundamentalmente de la relación funcional entre el proceso de selección de cartera y la tasa de inflación. Dado que el dinero es neutral, cuando el gobierno decide aumentar la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, asociado a este proceso aumenta la tasa de inflación en la misma cuantía. Sin embargo, eso incrementa la tasa de interés nominal, por lo que la demanda de dinero disminuye, al tiempo que los agentes aumentan la demanda de capital para cubrirse de las pérdidas asociadas con la inflación (esto es ñϕò cae). Así, cuando aumenta la tasa de crecimiento del dinero, la relación capital-trabajo sube y con ello el producto per-cápita de la economía. Por lo tanto, en este modelo, el dinero es superneutral en un sentido positivo, ya que si bien existe una mayor inflación, la contracara es un aumento del producto per-cápita y mayor bienestar (Johnson -1966-).