



ASOCIACION ARGENTINA
DE ECONOMIA POLITICA

ANALES | ASOCIACION ARGENTINA DE ECONOMIA POLITICA

L Reunión Anual

Noviembre de 2015

ISSN 1852-0022

ISBN 978-987-28590-3-9

Una metodología para el cálculo de riesgo de
tasas de interes

González, Mirta
Pérez, María

UNA METODOLOGÍA PARA EL CALCULO DE RIESGO DE TASAS DE INTERES*

Mirta Lidia González, María Cecilia Pérez†

Resumen

En el presente trabajo se aplica una metodología para la medición de riesgo de tasa de interés. Luego de la estimación y simulación de la estructura temporal de tasas de interés se realiza el cálculo del valor en riesgo y del *expected shortfall* sobre los resultados de una cartera. La aplicación de distribuciones de probabilidades alfa-estables ha permitido representar el comportamiento típicamente asimétrico, leptocúrtico y con colas pesadas de los rendimientos financieros y la ocurrencia de escenarios extremos.

Abstract

A methodology for measuring interest rate risk is applied in this paper. After estimating and simulating the interest rate term structure, the value at risk and expected shortfall of interest rates is calculated on a portfolio. The application of alpha - stable distributions allowed the representation of asymmetrical, leptokurtic and heavy tailed representation of financial returns behavior and the extreme scenarios occurrence.

Clasificación JEL: C15, C16, G11, G12

* Las opiniones vertidas son de exclusiva responsabilidad de los autores, y no necesariamente representan las del BCRA.

† Banco Central de la República Argentina. Correos electrónicos: mirta.gonzalez@bcra.gob.ar, maria.perez@bcra.gob.ar.

Introducción

Las crisis financieras recientes pusieron en evidencia la necesidad de una mejora integral de los modelos de riesgo. Una apropiada medición es fundamental para la correcta gestión de riesgos y para una regulación apropiada. El riesgo de mercado hace referencia a las pérdidas derivadas de posiciones en activos, tanto dentro como fuera del balance, expuestos a riesgo de tasa de interés, cambios en precios de *commodities*, de acciones y riesgo cambiario. El foco de análisis del presente trabajo será el riesgo de tasa de interés y su medición a través de la aplicación de los desarrollos metodológicos más actualizados.

En el desarrollo de la medición del riesgo se pueden identificar tres períodos de importantes avances para las finanzas (Romero Meza, 2005). Inicialmente, el riesgo financiero era considerado como un factor correctivo del retorno esperado y los retornos ajustados por riesgo eran definidos de una manera *ad hoc*. Fue Markowitz quien introdujo (1952; 1959) importantes avances al proponer como medida de riesgo a la varianza asociada al retorno de inversiones, definida ésta como el cuadrado de los desvíos con respecto a la media de los retornos; y extendiendo luego el análisis al caso de un portafolio de activos. De acuerdo a los supuestos de la teoría la distribución de probabilidades Normal era la que caracterizaba el comportamiento de los retornos de los activos financieros. Un segundo período de avances en materia de medición de riesgos surgió con los trabajos de Merton (1969), Black y Scholes (1973) y los modelos de tiempo continuo para la valuación de opciones y otros derivados financieros. Finalmente, el más reciente de los períodos puede asociarse a los desarrollos de Artzner *et al.* (1997; 1999) y la consideración de las medidas coherentes de riesgo. Es entonces cuando comenzó a lograrse una mayor aproximación al comportamiento empírico de las series financieras, típicamente asimétricas, leptocúrticas y con colas pesadas.

A principios de los años 90 aumentó el interés por los riesgos sistémicos después de las pérdidas importantes que sufrieron organizaciones como Orange County, Barings Bank y Metallgesellschaft. Estos hechos dejaron en evidencia importantes fallas en los controles del riesgo financiero por lo que la medida de Valor en Riesgo (VaR por su sigla en inglés) se expandió al sector privado, los reguladores y los bancos centrales. En 1995 el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria implementó los requerimientos de capital por riesgo de mercado basados en la medida de VaR y a continuación la medida fue también adoptada por otras instituciones como la Security and Exchange Commission (SEC). La dificultad del cálculo del VaR surge, particularmente, cuando la distribución de los retornos no se ajusta a la ley normal y es preciso, como en el presente trabajo, profundizar el estudio de los momentos de tercer y cuarto orden de la distribución para no subestimar la probabilidad de ocurrencia de eventos extremos como los registrados en las recientes crisis financieras.

Adicionalmente, y como sugiere el Comité de Basilea, el sistema de medidas de riesgo de mercado debe incluir el modelado de la estructura temporal de tasas de interés (ETTI). La consideración de los segmentos de vencimientos permite capturar la variación en la volatilidad de las tasas de interés a lo largo de la misma, por lo que existirá un factor de riesgo para cada segmento de la curva.

De tal forma, el análisis del riesgo producido por cambios en la tasa de interés resulta particularmente interesante. La ETTI muestra la relación existente entre los plazos de vencimiento y las tasas de interés spot. Una característica típica es que al variar las tasas de interés, éstas no varían en igual proporción para todos los plazos. Entonces, con la variación de la estructura se generan distintos escenarios que puede enfrentar un agente o entidad financiera con el consecuente impacto sobre su cartera de activos y pasivos que se reflejará en el cálculo de las medidas de riesgo adecuadas. Debido a que la estructura de tasas es incierta a futuro, se recurre a la simulación para generar múltiples ETTIs y obtener así el perfil de riesgo de una cartera. Por consiguiente en el presente trabajo se buscará

modelar y simular la ETTI de manera integral en todos sus puntos a la vez, para luego realizar el análisis de riesgo de tasa de interés de una cartera hipotética simple.

En la primera sección se revisarán teóricamente y se evaluarán los resultados de la estimación de dos de los modelos de estructura de tasas de interés más conocidos como son el modelo de Vasicek y el de Nelson y Siegel. En la segunda sección se realizará el análisis de la distribución de probabilidades de los coeficientes del modelo de Nelson y Siegel y su aplicación a la simulación de la estructura de tasas de interés. En la tercera sección se buscará medir el riesgo por tasa de interés de una cartera simple e hipotética. Finalmente, se concluirá.

1. Modelos de Estructura Temporal de Tasa de Interés

La estructura temporal de tasas de interés (ETTI) nos muestra la relación existente entre los plazos de vencimientos y las tasas spot. El desarrollo de modelos para la estimación y representación de la misma es de especial interés para los inversores y las instituciones gubernamentales o bancos centrales.

Existen diversos modelos de la ETTI que han sido desarrollados a lo largo del tiempo. Uno método de estimación inicial fue el de Bliss y Fama (1987) que introduce el ajuste de la curva por método de Splines, al cual le siguieron muchos otros modelos del mismo estilo. La crítica fundamental a estos modelos estaba vinculada a resultados sin sentido económico.

Luego, el modelo que ha sido base para muchos otros que le siguieron es el modelo de Vasicek de 1977. Posteriormente una extensión al modelo de Vasicek muy difundida es el modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) de 1985. Otras famosas extensiones son las versiones de dos factores de Vasicek, factores múltiples del modelo CIR, los modelos de Hull-White (1990) y el de Black-Derman-Toy de 1990.

Desde un punto de vista matemático se encuentran los modelos de tres factores de Nelson y Siegel de 1987 y su extensión a cuatro factores realizada por Svensson en 1994. Otra tipo de modelos de ETTI es el de Heath- Jarrow-Morton (1987) que se diferencia de los otros modelos, como ser el de Vasicek, en que captura la dinámica de toda la curva de rendimiento, mientras que otros modelos capturan sólo la dinámica de sólo un punto de la curva. Sin embargo los modelos como los de Heath- Jarrow-Morton son computacionalmente complicados al presentar una estructura no markoviana.

Particularmente, el modelo de Nelson y Siegel es ampliamente utilizado por tener un muy buen ajuste respecto de las curvas a término observadas además de ser intuitivo en cuanto a su interpretación. Según el BIS (2005) los bancos centrales de Bélgica, Finlandia, Francia, Alemania, Italia, Noruega, España y Suiza usan Nelson y Siegel para estimar las curvas spot y el Banco Central Europeo publica diariamente las curvas de rendimiento del área Euro tomando como modelo el de Svensson¹. Los administradores de carteras de renta fija utilizan el modelo para inmunizar sus carteras a modo de ejemplo, Martellini y Meyfredi (2007) utilizan el modelo de Nelson y Siegel para calibrar la ETTI y estimar el Valor a Riesgo de portafolios de renta fija. El modelo ha ganado recientemente un amplio interés en el ámbito académico y es utilizado como input también dentro de los llamados modelos "affine".

Existen al menos cuatro motivos para explicar la popularidad del modelo de Nelson y Siegel. En primer lugar es sencillo de estimar. Siempre que el parámetro de decaimiento temporal τ (tau) sea fijo, las curvas del modelo de Nelson y Siegel se obtienen mediante regresiones lineales. En el caso de que el parámetro tau no sea fijo, se deben utilizar técnicas de regresión no lineales. En segundo lugar, por construcción el modelo genera tasas para todos los vencimientos. Tercero, los factores estimados del modelo de Nelson y Siegel tienen una interpretación intuitiva, como ser el nivel, la pendiente y la curvatura. Y

¹ <http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html>

cuarto, empíricamente el modelo de Nelson y Siegel ajusta los datos correctamente y ha demostrado ser un modelo que predice correctamente.

Sin embargo y a pesar de los méritos empíricos y de estar ampliamente difundido, posee dos críticas a nivel teórico. Una es que el modelo no está planteado a nivel teórico como un modelo de no arbitraje. A pesar de ello, Coroneo, Nyholm y Vidava- Koleva (2008) estudiaron que tan bien el modelo se ajusta a los modelos de sin arbitraje y logran concluir que los parámetros obtenidos por el modelo de Nelson y Siegel no son estadísticamente distintos de los obtenidos por modelos de la estructura a término con supuesto de no arbitraje. Otra crítica es que el modelo no se encuadra dentro de los llamados modelos de estructura temporal denominados affine según los define Duffie and Kan 1996, que a modo de ejemplo de estos modelos y en el caso particular de una dimensión, se encuentran los modelos de Vasicek (1977), Cox, Ingersoll, and Ross (1985).

1.1. Modelo de Vasicek

El modelo asume que la tasa de interés sigue un proceso de Markov. El ser también un proceso continuo, se lo llama proceso de difusión. Con lo cual la tasa de interés de corto plazo r_t seguirá la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dr_t = \kappa(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t$$

La ecuación presenta una primer parte determinista en donde la tasa de interés tiende a su valor medio μ de largo plazo y una segunda parte estocástica, donde W_t es un movimiento browniano o proceso de Wiener y dW_t es ruido blanco.

κ , μ y σ son constantes. κ se interpreta como la velocidad de reversión de la tasa de corto plazo hacia su valor medio de largo plazo.

Cuando $r_t > \mu$, el término $(\mu - r_t)$ será negativo y impulsará a la tasa de corto plazo hacia abajo para converger hacia μ , caso contrario, si $r_t < \mu$, el término será positivo e impulsará a la tasa de corto plazo hacia arriba para converger a μ .

Los supuestos detrás del modelo son que el mercado es eficiente y no hay costos de transacción. Además, la información está disponible para todos los inversores simultáneamente y cada inversor actúa racionalmente. En consecuencia, no existe posibilidad de realizar arbitraje libre de riesgo.

La resolución de la misma, es decir la obtención de r_t , se obtiene aplicando la fórmula de Itô que en el caso del modelo de Vasicek encuentra una única solución

$$r_{t+\Delta t} = e^{-k\Delta t} r_t + \mu(1 - e^{-k\Delta t}) + \sigma e^{-k(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{-kt} dW_t$$

r_t se distribuye normalmente con media y varianza:

$$E[r_{t+\Delta t} / r_t] = e^{-k\Delta t} r_t + \mu(1 - e^{-k\Delta t})$$

$$Var[r_{t+\Delta t} / r_t] = \left(\frac{\sigma^2}{2k} \right) (1 - e^{-2k\Delta t})$$

El precio de un bono cupón cero se define:

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(t) dt}$$

Reexpresado utilizando Vasicek:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

$$A(t, T) = \exp \left[(B(t, T) - T + t)(\mu - \sigma^2 / 2\kappa^2) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4\kappa} \right]$$

En consecuencia se obtiene la Estructura de Tasas de interés

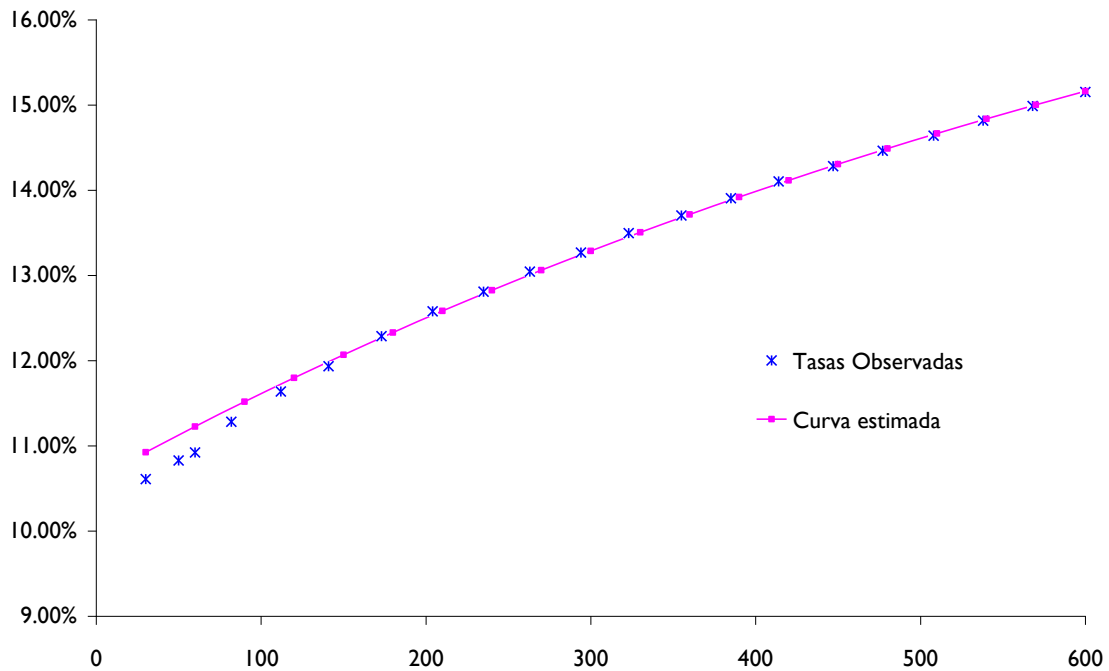
$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T)r(t)$$

1.2. Estimación de la ETTI por Vasicek

Para la estimación de las curvas spot se utilizaron como datos las tasas de cierre de los contratos de futuros de tasa de interés que se negocian en el MAE. Los mismos son contratos bilaterales (cada uno con valor nominal de \$100.000) que tienen como subyacente la tasa Badlar Bancos Privados y realizan una compensación diaria, efectuando un *mark to market* de la tasa de los contratos. El plazo máximo de estos contratos que puede ofrecer MAE es de hasta 24 meses. De la observación de curvas *forward* se calcula en consecuencia las correspondientes curvas spot.

La estructura temporal de Tasas Badlar se obtuvo mediante la calibración del modelo de Vasicek, obteniéndose en consecuencia la curva que mejor ajusta las tasas observadas. La volatilidad diaria (σ) y valor medio (μ) de la tasa de corto plazo del modelo, en este caso la Badlar Bancos privados 30 días, se obtuvo a partir de datos históricos. Luego se construyó una grilla de variabilidad para κ , μ y σ , de las que surgieron distintas curvas de las que se seleccionó aquella con menor error medio cuadrático respecto de la curva observada.

Figura 1: Ajuste Curva Badlar Bancos Privados por Vasicek al 8 junio 2010



1.3. Modelo de Nelson y Siegel

Nelson y Siegel en *Parsimonious Modeling of Yields Curves* (1987) proponen un modelo matemático de ajuste de la curva de rendimiento simple y parsimonioso con la flexibilidad suficiente para representar un amplio rango de formas que adoptan las mismas como ser la monótonas, jorobadas y en S.

En el modelo paramétrico de Nelson y Siegel, se supone que la tasa *forward* instantánea $r(m)$ para el plazo m esta dada por la solución de una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales y distintas, de la siguiente forma

$$r(m) = \beta_1 + \beta_2 * \exp(-m / \tau_1) + \beta_3 * \exp(-m / \tau_2)$$

En donde τ_1 y τ_2 son constantes temporales asociadas con la ecuación y β_1 β_2 β_3 están determinadas por condiciones iniciales. Esta ecuación genera una familia de curvas *forward* con formas monótonas creciente, decrecientes, jorobas o con forma de S, dependiendo de los valores de β_2 y β_3 y son asintóticas al valor de β_1 .

Luego, a fin de evitar una sobreparametrización del modelo, los autores proponen un modelo más parsimonioso que es capaz de generar la misma familia de formas de la curva y está dado por la solución a la ecuación diferencial para el caso de raíces iguales

$$r(m) = \beta_1 + \beta_2 * \exp(-m / \tau) + \beta_3 * [(m / \tau) * \exp(-m / \tau)]$$

Donde nuevamente, los valores de β_1 , β_2 , β_3 , τ determinan la forma de la curva. La expresión puede ser vista como una constante más una función de tipo Laguerre, que consisten en un polinomio por término de un decaimiento exponencial y son una forma matemática de aproximar funciones.

La tasa spot $R(m)$ se obtiene como el promedio de las tasas *forward* hasta m . De esta manera Nelson y Siegel arriban a la siguiente expresión de las tasas spot en función de los parámetros que determinan la forma de las curva.

$$R(m) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) * \frac{1 - \exp(-m/\tau)}{(m/\tau)} - \beta_3 * \exp(-m/\tau)$$

Operando queda la siguiente expresión que es la que se utilizará posteriormente para estimar el modelo:

$$R(m) = \beta_1 + \beta_2 * \frac{1 - \exp(-m/\tau)}{(m/\tau)} + \beta_3 * \left[\frac{1 - \exp(-m/\tau)}{(m/\tau)} - \exp(-m/\tau) \right]$$

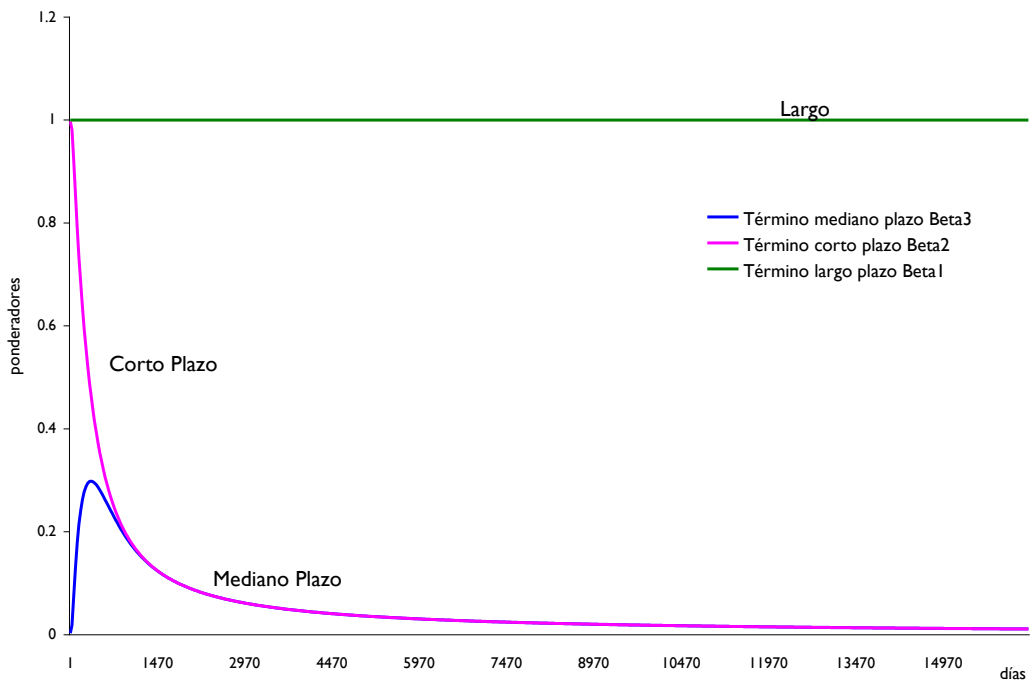
$$\text{Con } \lim_{m \rightarrow \infty} R(m) = \beta_1 \quad ; \quad \lim_{m \rightarrow 0} R(m) = \beta_1 + \beta_2$$

El modelo es no lineal lo que introduce ciertos inconvenientes para su estimación. Nelson y Siegel simplificaron la estimación fijando el valor de τ (variable que genera la no linealidad) y así, la función es lineal en sus coeficientes, lo cual hace que el modelo sea sencillamente estimado por mínimos cuadrados clásicos. Es decir que con el fin de estimar los coeficientes de la función, se utiliza mínimos cuadrados clásicos condicionado a un rango de valores posibles de τ , un rango de búsqueda del mejor τ . Nelson y Siegel utilizan como criterio de selección de las estimaciones de los coeficientes aquellas que hacen máximo el R^2 .

Ahora bien, otra de las fortalezas de este modelo, como hemos visto, es la posibilidad de interpretar sus coeficientes y su peso en el corto, medio y largo plazo. Es así como el rol de los coeficientes puede interpretarse a partir de su comportamiento respecto del plazo m . β_1 es indicador del nivel de la tasa de interés in el largo plazo. Luego, β_2 indica el peso que se le da a la componente de corto plazo y es indicativo de la pendiente de la curva, positiva si $\beta_2 < 0$ y pendiente negativa, caso contrario. Y finalmente β_3 es la importancia relativa al mediano plazo en la estructura temporal de tasas, y genera el mayor o menor grado de curvatura en forma de joroba o de valle dependiendo del valor absoluto que tome el coeficiente. Con respecto a τ , es una constante temporal y determina la rapidez con la que los términos que lo incluyen en la ecuación tienden a su límite. Es decir, si su valor es pequeño, entonces las aproximaciones de la curva son mejores en los plazos cortos respecto de los largos y en cambio, con valores grandes el ajuste es mejor en el largo plazo respecto del corto. Este coeficiente determina tanto la inclinación de la pendiente como la ubicación del máximo o mínimo de la función.

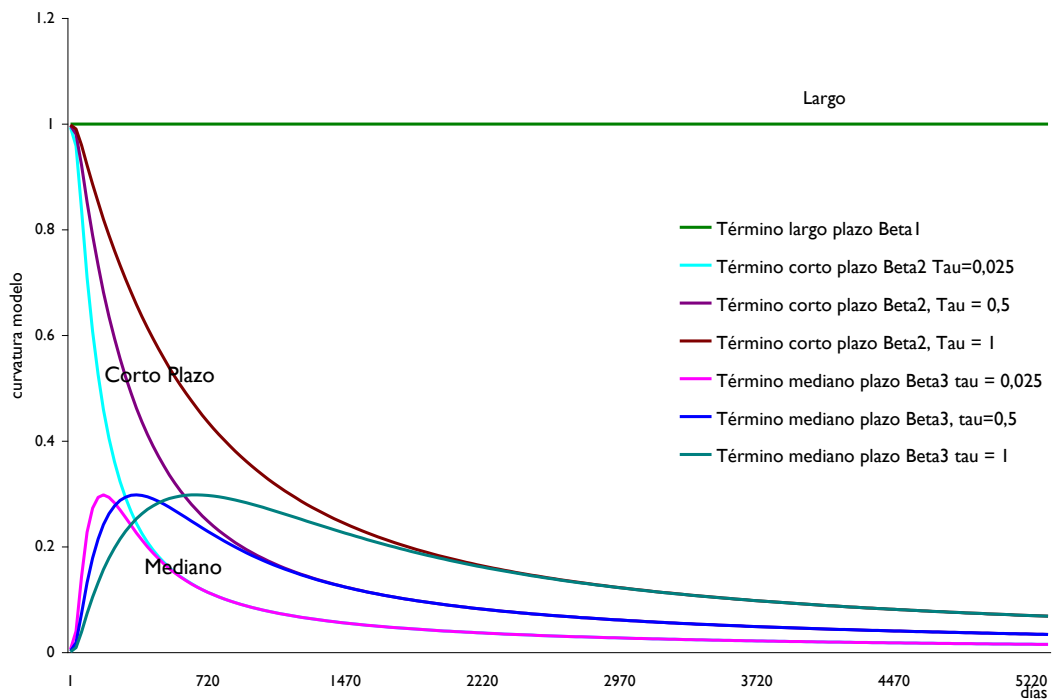
A continuación se puede observar el peso de los componentes o coeficientes de la función a lo largo del tiempo para un valor determinado de τ en este ejemplo igual a 0,5. Como puede verse el componente de largo plazo es una constante que no cae a cero en el límite, la curva del mediano plazo, empieza en cero, por lo que no afecta el corto plazo y decae a cero en el largo plazo y finalmente la curva del corto plazo tiene el decaimiento más rápido hacia cero. Entonces, el corto plazo está determinado sólo por $(\beta_1 + \beta_2)$ Dependiendo del peso que cada componente tenga en la función se pueden generar diferentes formas de las curvas de rendimientos.

Figura 2: Coeficientes de la Curva Spot con valor de Tau = 0,5



Luego a continuación podemos observar los distintos ajustes de la curvatura dependiendo del valor que tome τ . Claramente puede observarse que a medida que aumenta el valor de τ la velocidad a las que componentes que determinan la curvatura en el corto y mediano plazo tienden a cero, es menor.

Figura 3: Dinámica de los coeficientes de la Curva Spot a distintos valores de Tau



1.4. Estimación de la ETTI por Nelson y Siegel.

Nuevamente para la estimación de las curvas spot se utilizaron los mismos datos que en caso de la estimación por Vasicek.

Partiendo de la función de Nelson y Siegel para curvas spot que hemos visto anteriormente, se procedió a la estimación de la curva spot. Para un determinado valor de τ , se estimó por mínimos cuadrados clásicos los coeficientes de la función $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Es decir, se hizo iterar el valor de τ dentro del rango de búsqueda entre 1 y 745 y para cada uno se estimó por mínimos cuadrados los coeficientes β_1, β_2 y β_3 de la función. El motivo por el cual se delimitó el valor máximo posible de τ en 745 es debido a que el plazo mayor para el cual se tienen datos históricos.

A fin obtener la mejor curva spot estimada con el mejor ajuste a los datos observados, se seleccionó la curva que arrojó la mínima suma de errores al cuadrado. Es decir se busca:

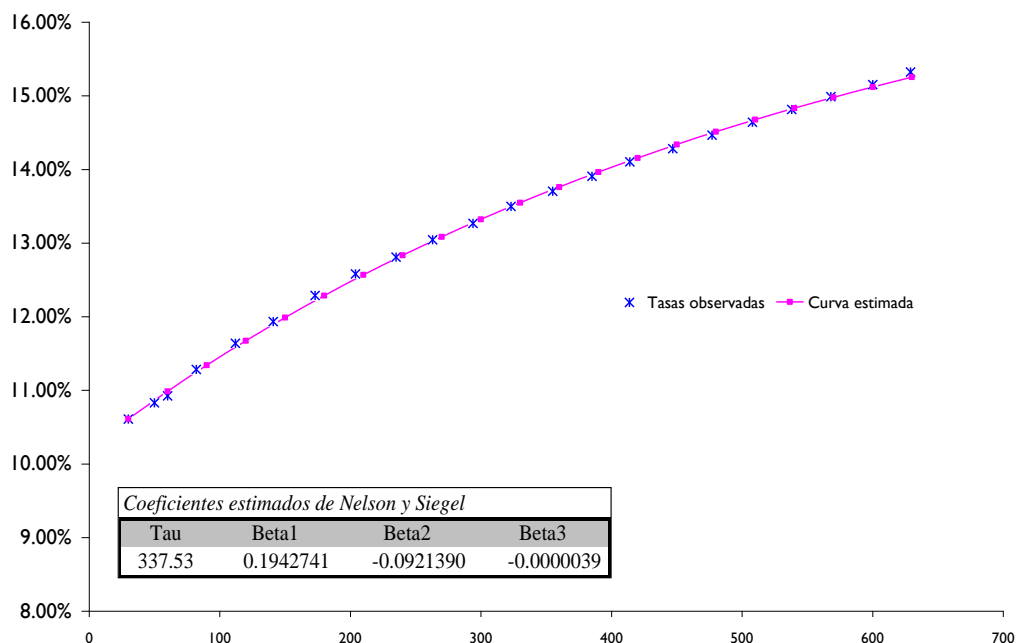
$$\min \sum_{i=1}^m \left(r_i - \hat{r}_i(\hat{\beta}) \right)^2$$

Donde r_i es la tasa observada y $\hat{r}_i(\hat{\beta})$ es la tasa estimada por el modelo.

Con el fin de obtener la estimación de los coeficientes otros autores utilizaron métodos de regresión no lineal, sin embargo Ferguson y Raymar (1998) muestran que las estimaciones de tipo no lineal son muy sensibles a los valores iniciales y existe una alta probabilidad de obtener óptimos locales. De acuerdo a esto, muchos autores prefirieron fijar el valor de τ para estimar el modelo de manera lineal siguiendo la metodología de selección del τ tal que minimice la suma de los errores al cuadrado, lo que hemos realizado en este trabajo o bien estimando por mínimos cuadrados clásicos los coeficientes a partir de valores de τ predeterminados a partir de información previa, este es el caso de Diebold y Li (2006) y Fabozzi (2005).

A modo de ejemplo se presenta la estimación de la curva para el 8 de junio de 2010 con los valores de τ, β_1, β_2 y β_3 estimados.

Figura 4: Ajuste Curva Badlar por Nelson y Siegel al 8 de junio 2010



1.5. Comparación del ajuste de las ETTI obtenidas a partir de los modelos de Vasicek y Nelson y Siegel

Se tomaron los cierres de los contratos entre el 4 de Enero de 2010 y el 31 de agosto de 2011, contando así con 411 días de observación de curvas *forward*. Luego nuevamente de las mismas se obtuvieron las correspondientes curvas spot. Es decir, que a partir de la relación existente entre la curva spot y la *forward* es posible obtener una a partir de la otra por lo que se calcularon entonces 411 curvas spot correspondientes para cada día.

Siguiendo las metodologías descriptas para estimar una ETTI tanto por N&S como por Vasicek para un día determinado, se realizó lo mismo para los 411 días mediante la ayuda del software GNU Octave que permitió simplificar operativamente el trabajo.

A continuación se muestran las 411 Estructuras Temporales de Tasa de Interés estimados por Vasicek y por N&S. Se puede observar que todas las curvas tienen una pendiente positiva, lo cual implica que en el modelo de N&S todos los β_2 estimados resultaron menores a cero. En determinados períodos la pendiente es positiva pero relativamente más alta que en otros. En general las curvas tienen una forma monótona creciente, con máximos en el vencimiento más alto. Otras curvas pueden verse que adoptan una forma de S. Puede observarse además, una evolución de las tasas en el tiempo creciente siendo más marcada hacia el final de la muestra, alrededor del julio de 2011.

Figura 5: Familia de ETTI estimadas por N&S (a partir de 411 observaciones diarias)

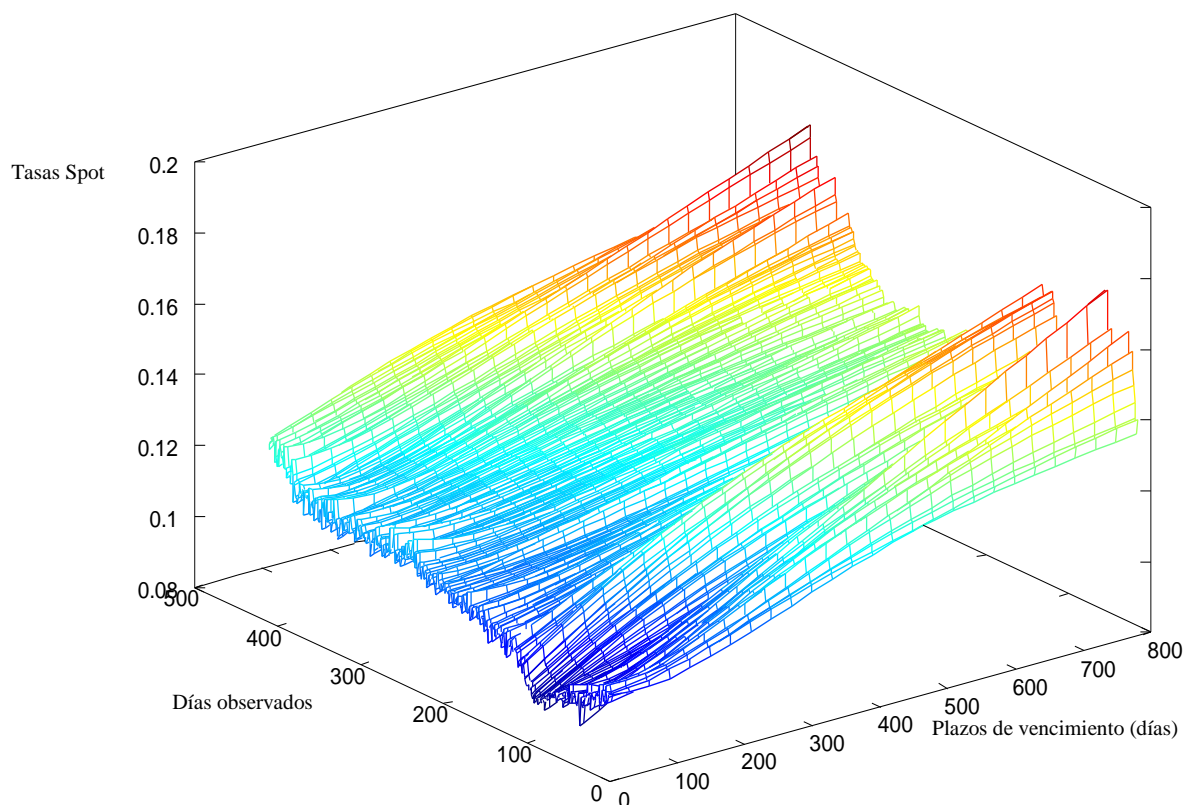
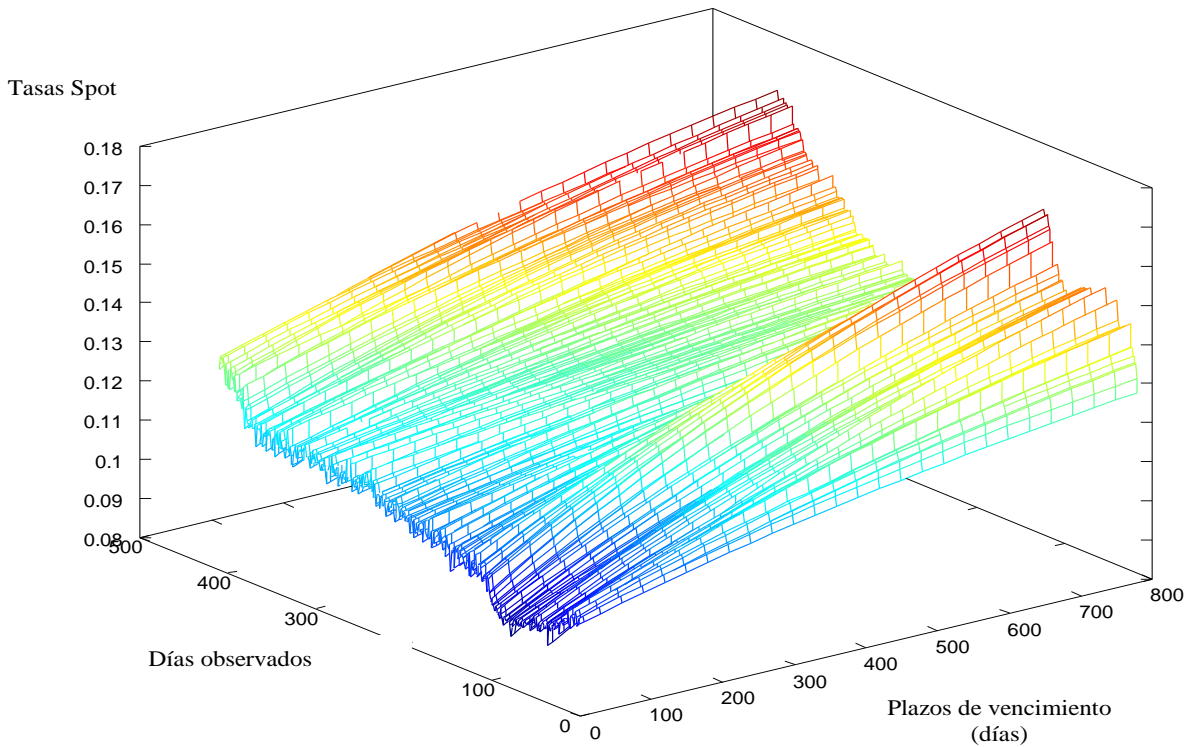


Figura 6: Familia de ETTI estimadas por Vasicek (a partir de 411 observaciones diarias)



A continuación se muestra los resultados del error medio cuadrático para los distintos plazos de vencimiento de las curvas ajustadas respecto de las observadas a lo largo de 411 días. Puede verse que en general el ajuste logrado con el modelo de Nelson y Siegel es mejor en todos los plazos

Figura 7: Comparación ajuste modelos Vasicek y Nelson y Siegel

<i>Resultados del ajuste In Sample</i>	
Plazos de vencimientos (maturities)	RMSE
Modelo Nelson y Siegel	
30 días	0.065%
60 días	0.047%
180 días	0.031%
360 días	0.030%
Modelo Vasicek	
30 días	0.199%
60 días	0.262%
180 días	0.274%
360 días	0.163%

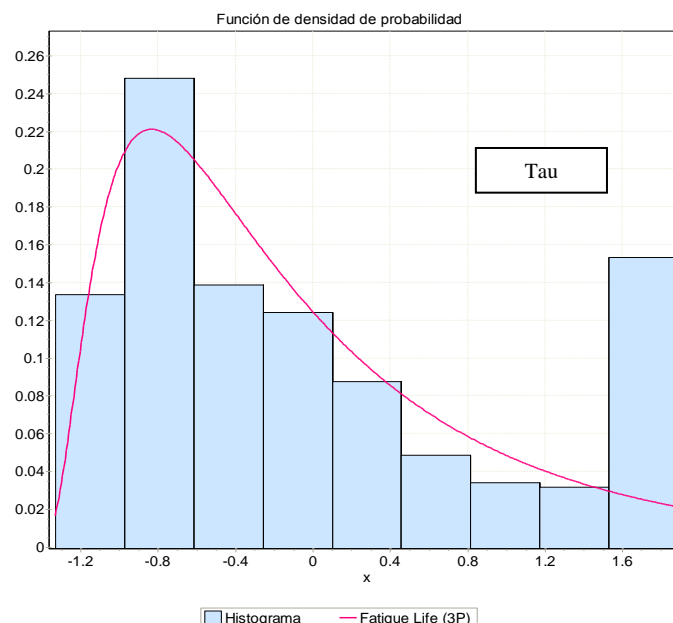
2. Simulación de las estructuras de tasas de interés

La estructura temporal de tasas es incierta a futuro por lo que muchas veces se recurre a la simulación de Monte Carlo para generar múltiples ETTIs y obtener así el perfil de riesgo de una cartera. Este tipo de simulación se realiza fijando previamente los plazos de la curva a simular y se simula uno a uno independientemente. Sin embargo esta metodología además de compleja podría arrojar resultados incongruentes entre sí. En este trabajo se aplicará la metodología descrita en Márquez Diez-Canedo, Nogués Nipón y Grajales (2003) que permite modelar la ETTI en todos sus plazos de vencimiento posibles guardando siempre la congruencia entre los distintos plazos. Será fundamental para realizar la simulación de la ETTI el análisis previo de las distribuciones de probabilidad de los coeficientes estimados por Nelson y Siegel en la sección anterior ya que a partir de las distribuciones teóricas obtenidas se podrá entonces simular los coeficientes del modelo tantas veces como se desee y así generar la misma cantidad de ETTIs.

2.1. Distribuciones empíricas y teóricas de los coeficientes del modelo de N&S

A partir de las curvas ajustadas por el método de Nelson y Siegel se obtuvieron como subproducto los coeficientes τ , β_1 , β_2 y β_3 de la función estimados por mínimos cuadrados. En consecuencia, es posible obtener las distribuciones empíricas correspondientes a cada uno de los coeficientes y realizar el ajuste de las distribuciones teóricas que sigue cada coeficiente, considerando para ello reconocidas pruebas de bondad de ajuste que se detalla en el anexo 2.

Figura 8: Ajuste coeficiente Tau: Distribución Fatigue Life



Observando particularmente el histograma de los valores centrados de τ , existen dos posibles explicaciones a las altas cantidades de valores del coeficiente concentrados en el límite superior del intervalo, que son la ausencia de jorobas o valles en las curvas o bien la presencia de más de una joroba o valle en la forma de la curva. En el caso de nuestras curvas, se da el primer caso, las curvas con monótonas crecientes, sin joroba y presentan un máximo en el vencimiento más alto.

Figura 9: Ajuste coeficiente Beta 1: Distribución Beta1

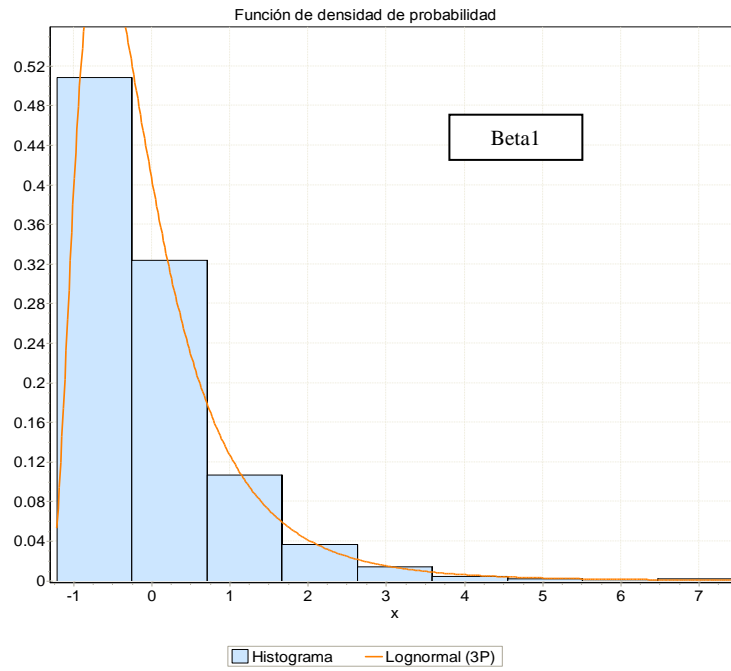


Figura 10: Ajuste coeficiente Beta 2: Distribución Beta

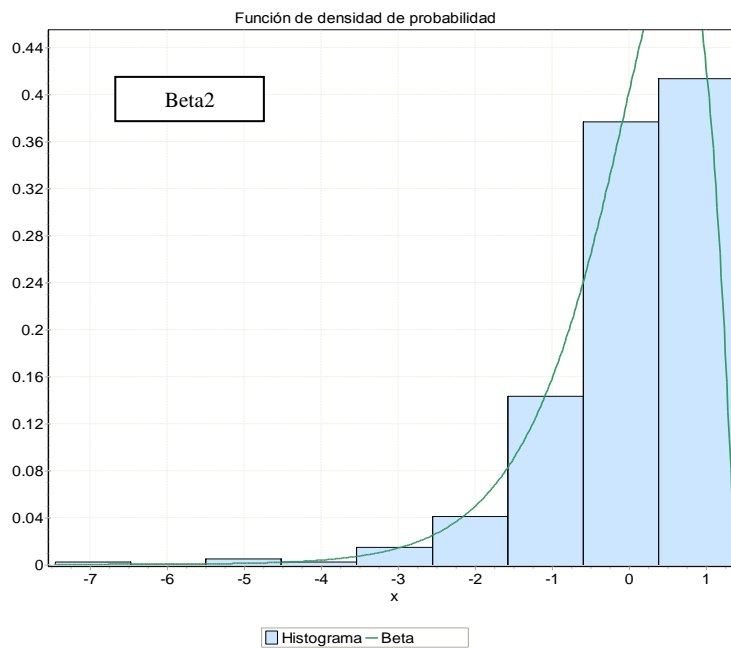
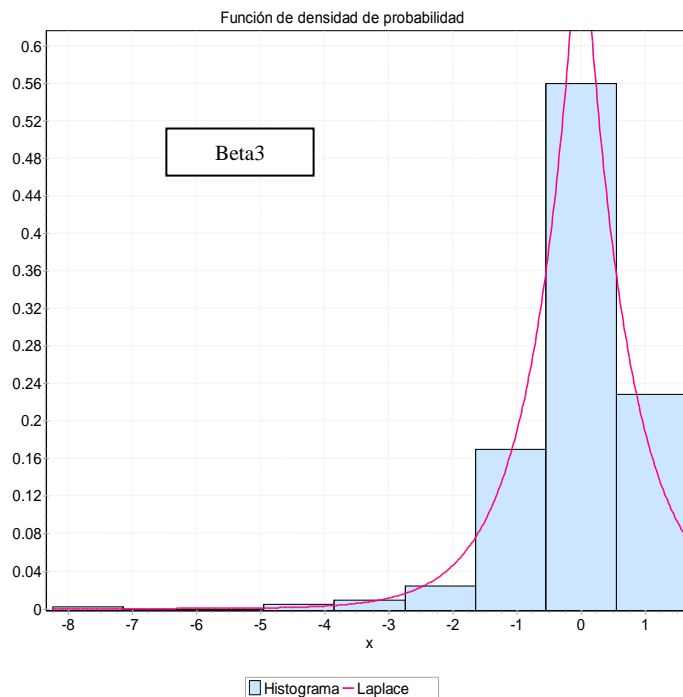


Figura 11: Ajuste coeficiente Beta 3: Distribución Laplace



2.2. Simulación de las estructuras de tasas de interés

A fin de realizar la simulación de estructuras temporales de tasa de interés, se procedió en primer lugar a la estimación de la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes τ , β_1 , β_2 y β_3 que se obtuvieron a partir de las estimaciones por mínimos cuadrados y se descompuso la misma con una factorización de Cholesky. Luego se simularon los coeficientes de la función de Nelson y Siegel siguiendo el siguiente esquema:

$$\omega = \begin{pmatrix} \tau \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \mu + A * \theta$$

Donde ω es el vector de los coeficientes de Nelson y Siegel simulados que se obtienen a partir de la suma del vector μ que son los valores medios de los coeficientes estimados τ , β_1 , β_2 y β_3 , y la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes factorizada por Cholesky, A que es multiplicada por el vector θ de muestras aleatorias de los coeficientes que se realizan siguiendo las distribuciones de probabilidad teóricas que mejor ajustaron las en el punto anterior². Entonces los resultados de μ y A fueron:

² Para poder realizar la simulación se estandarizó la distribución empírica de los coeficientes, restándole su media y dividiendo por la desviación estándar, a fin de no duplicar los efectos de multiplicar el vector simulado por la matriz de Cholesky.

$$\mu = \begin{pmatrix} \tau \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 259,2375 \\ 0,2119 \\ -0,1012 \\ -0,0741 \end{pmatrix}$$

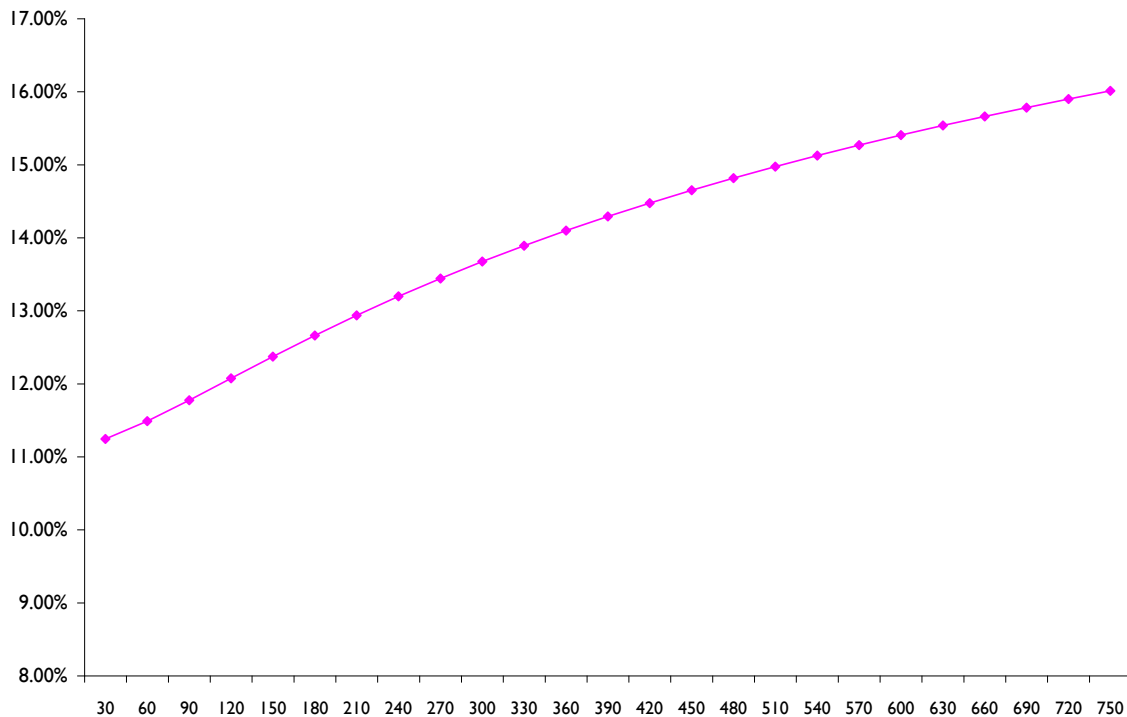
$$A = \begin{pmatrix} 204,66 & & & \\ 0,0413 & 0,0347 & & \\ -0,0415 & -0,0358 & 0,0093 & \\ -0,0108 & -0,0362 & -0,0032 & 0,0242 \end{pmatrix}$$

Y θ se obtuvo generando 1000 valores aleatorios de τ siguiendo la distribución Fatigue Life, β_1 con una distribución Lognormal de 3 parámetros, β_2 con una distribución Beta y β_3 con una distribución de Laplace.

Una vez simulados los coeficientes de Nelson y Siegel, se calcularon las tasas para los vencimientos 1, 7, 30, 60 y así hasta 780 días con intervalos de 30 días³, siguiendo la forma funcional de la ecuación de Nelson y Siegel y formando entonces las estructuras temporales de tasas

Siguiendo esta metodología se pudieron simular tantas curvas de estructuras temporales como se quiso. A partir de 1000 simulaciones de los coeficientes, surgieron 1.000 simulaciones de curvas de rendimiento todas utilizando la función de Nelson y Siegel. A continuación se muestra la Curva Media Esperada de la Estructura Temporal de Tasas de Interés.

Figura 12: Curva Media Esperada a partir de la simulación



³ Se seleccionaron esos plazos de vencimiento pudiendo haber sido cualquier otro deseado.

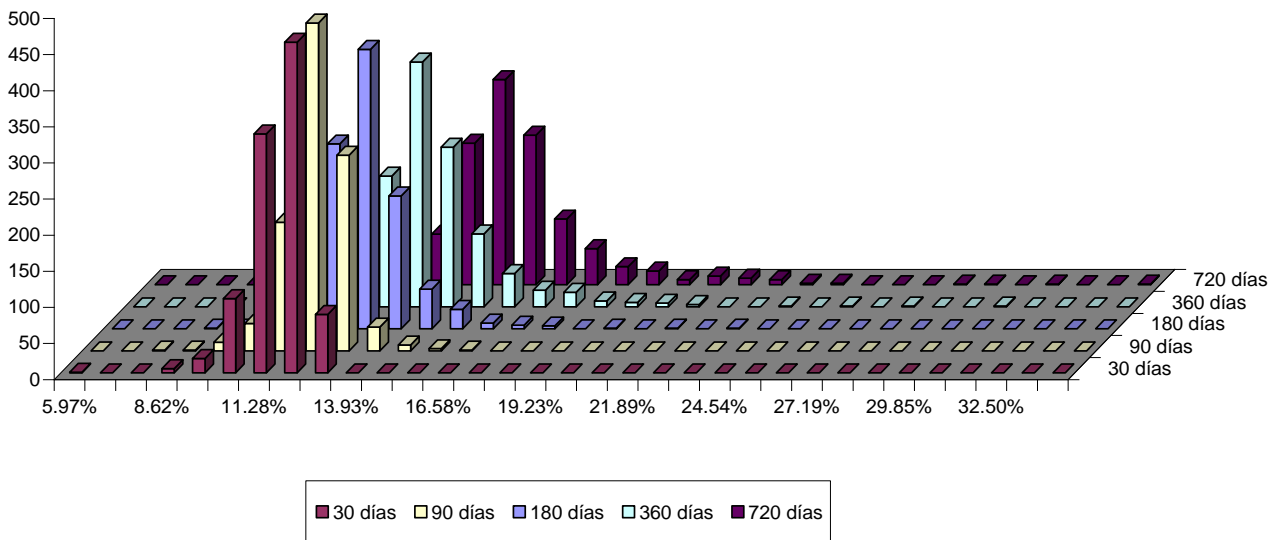
Como hemos mencionado la estructura temporal de tasas de interés nos muestra la relación existente entre los plazos de vencimiento y las tasas spot y una característica típica que es que al variar las tasas de interés, éstas no varían en igual proporción para todos los plazos. Esta característica conduce al denominado *yield curve risk* o riesgo asociado a la ETTI. Por ejemplo, el valor de un portafolio será diferente ante variaciones de la curva en paralelo o bien ante variaciones en la curva que generen un mayor empinamiento de la misma a mayores plazos. Los portafolios tienen distintas exposiciones dependiendo del modo en que la curva de rendimientos varíe y este es justamente el riesgo asociado a la ETTI.

Es así la importancia de estudiar el comportamiento de la variabilidad de las tasas para distintos plazos para poder eventualmente mejorar la valuación de un portafolio de renta fija o la valuación de un instrumento financiero o analizar el perfil de riesgo de cartera de una entidad ante distintos escenarios de tasas

2.3 Análisis de las tasas a los distintos plazos de vencimiento

A partir de la simulación de las curvas, entonces puede resultar interesante hallar las distribuciones de probabilidad teóricas que mejor se ajustan a cada plazo de la estructura temporal

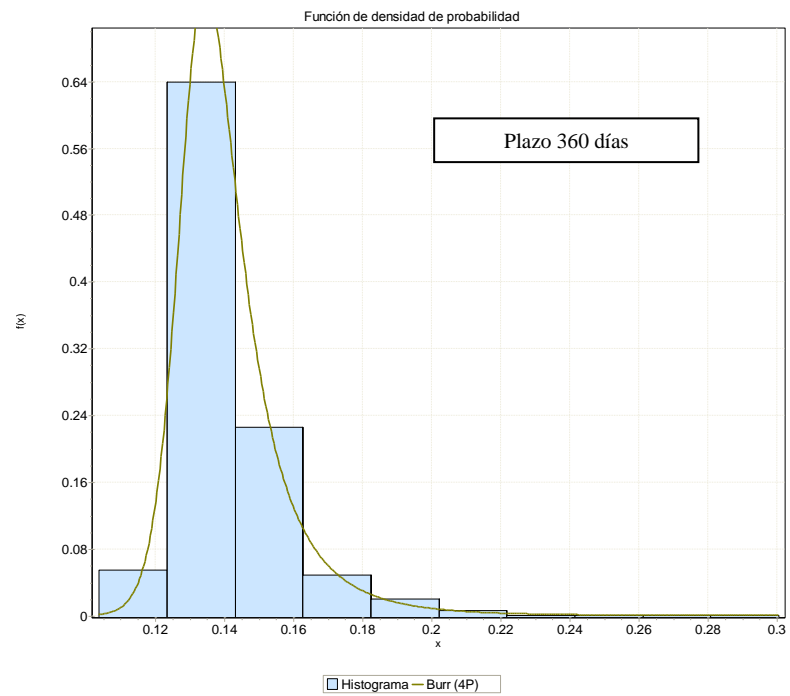
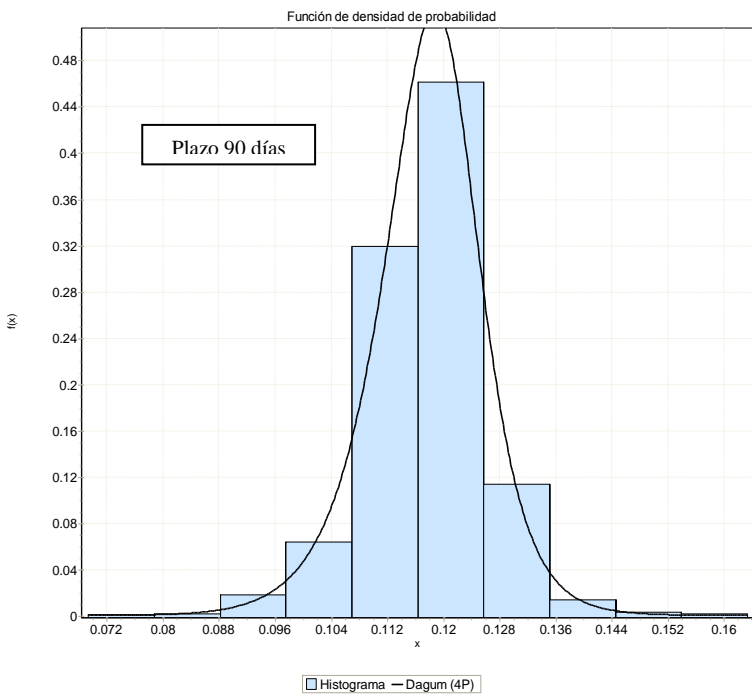
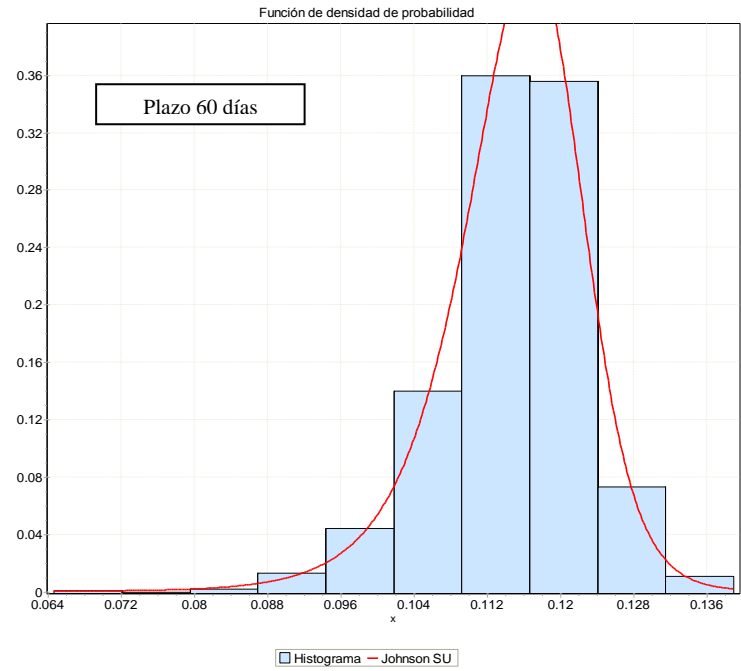
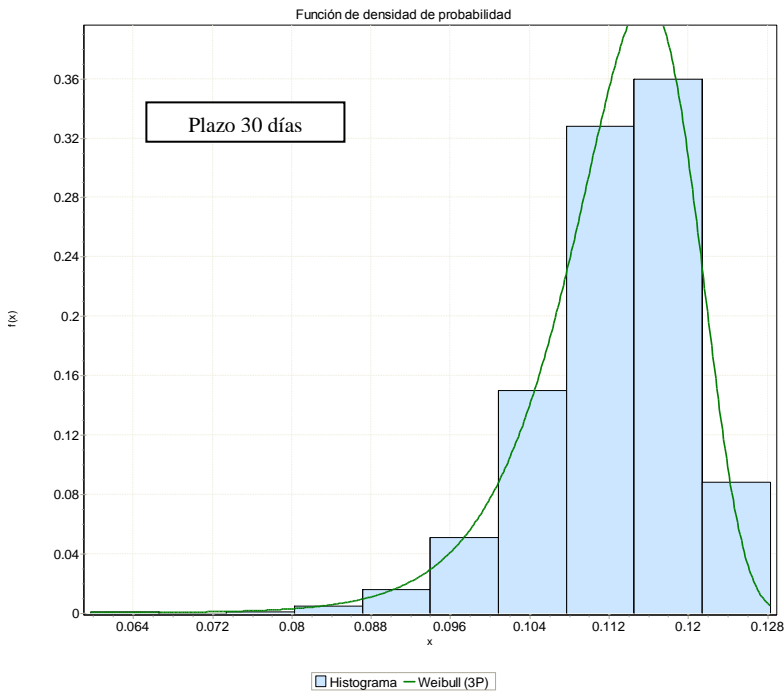
Figura 13: Distribución de probabilidades de Tasa Badlar Bancos Privados a distintos plazos de vencimiento



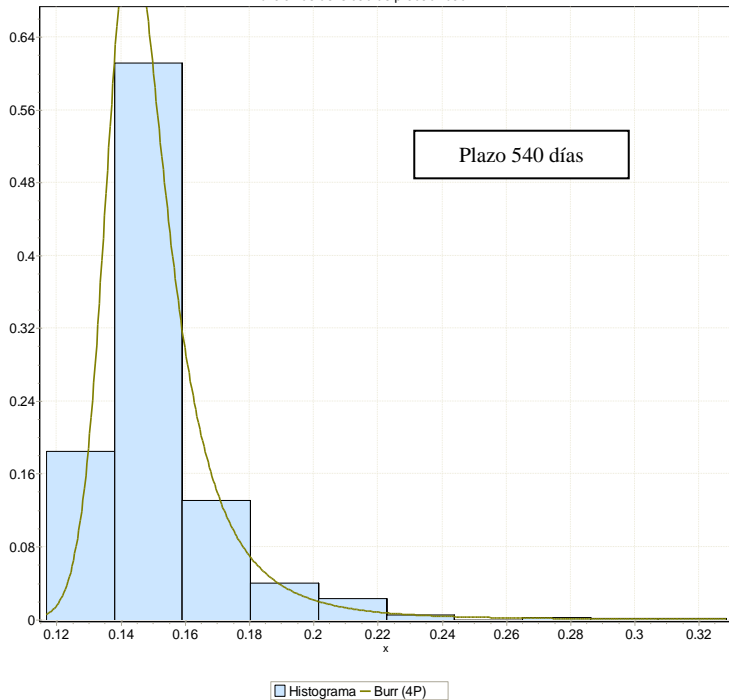
Como puede observarse la distribución de probabilidades de las tasas a los distintos plazos presentan una asimetría y curtosis diferente. En consecuencia se estudió la función de densidad teórica que mejor ajusta las distribuciones empíricas de las tasas para los plazos 30, 60, 90, 180, 360, 540 y 720 días.

A continuación puede verse las distribuciones empíricas y las distribuciones teóricas que mejor resultados de bondad de ajuste tuvieron.

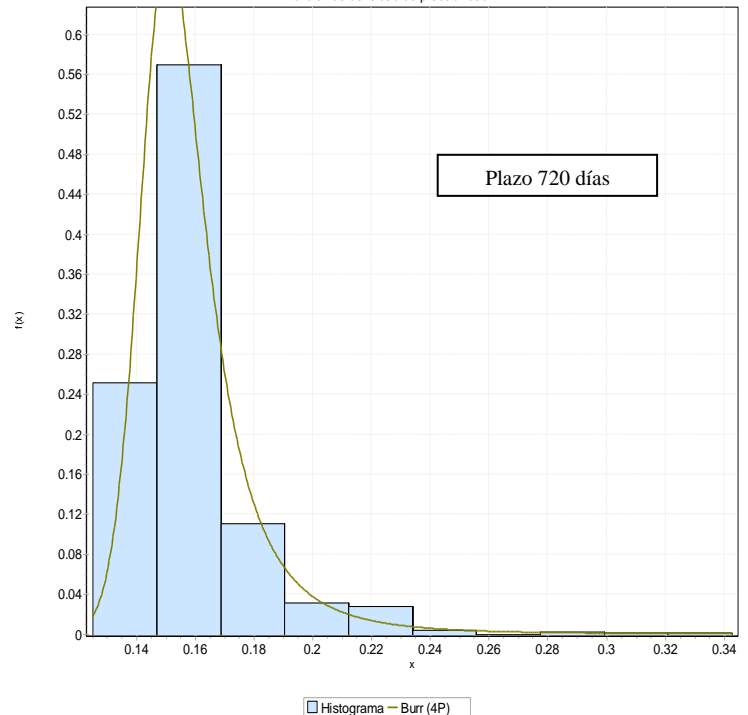
Figura 14: Secuencia ajuste de distribuciones de probabilidades a distintos plazos de vencimiento



Función de densidad de probabilidad



Función de densidad de probabilidad



La secuencia de distribuciones para los distintos plazos nos muestra como las mismas van de distribuciones asimétricas negativas en los plazos 30 y 60, para luego ir pasando a distribuciones con asimetrías positivas, cada vez más marcadas a mayores plazos. Esto está indicando que existe mayor probabilidad de tasas menores a menores plazos respecto de la distribución normal y mayor probabilidad de tasas más altas a mayores plazos respecto de la distribución normal.

Estudios realizados por Matteo y Aste (2001) sobre la cotización de los contratos de futuros sobre las tasa de interés de los Eurodollar⁴, encontraron también que las distribuciones de probabilidad mostraban “colas pesadas” con formas de tipo no Gaussiano, por ser distribuciones muy leptocurticas y asimétricas. Similar evidencia se encontró también sobre estudios realizados sobre la Libor. Adicionalmente señalan que distribuciones como la de Lévy o Khintchine son más apropiadas para describir el comportamiento de estas tasas de interés. Este último punto se ampliará más adelante en el trabajo.

Entonces a la luz de los resultados obtenidos podemos concluir que la estructura temporal media de tasas de interés presenta una forma típica con pendiente positiva y los desvíos respecto de la media difieren para los distintos plazos siguiendo distribuciones no gaussianas. Este es un punto a destacar a la hora de realizar futuros análisis tanto en el planteo de escenarios posibles de tasas de interés para la valuación de instrumentos como así también al utilizar modelos que incluyan supuestos acerca de la “normalidad” de la distribución de las tasas de interés.

3. Medición de riesgo de tasa de Interés

3.1 Medidas de Riesgo: VaR y Expected Shortfall

Una de las tareas más importantes de las entidades financieras es evaluar su exposición a los riesgos de mercado, es decir a las pérdidas en posiciones dentro y fuera del balance derivadas de cambios adversos por fluctuaciones estocásticas en posiciones a riesgo en tasa de interés, commodities, acciones y riesgo cambiario. La dependencia de una cartera en estos riesgos puede medirse a partir de las variaciones en su valor o las ganancias y pérdidas de la misma.

El modelado correcto de los factores de riesgo futuro es importante para las instituciones financieras a los fines de estimar correctamente el riesgo de mercado,

⁴ Dólares depositados en bancos fuera de los Estados Unidos, realizado por otro banco.

identificar la concentración de riesgo y desarrollar estrategias de operaciones y cobertura, optimización de las carteras, fijación de límites y cálculo de capital a los fines de regulación.

La medida de Valor a Riesgo se expandió desde los años 90 a partir de pérdidas considerables que sufrieron varias organizaciones y más aún desde 1995, cuando el Comité de Basilea sobre Supervisión Bancaria implementó los requisitos de capital por riesgo de mercado basados en esta medida de riesgo.

El VaR de un portafolio o cartera es una medida que nos indica la pérdida máxima que se podría esperar en un período de tenencia u horizonte temporal a un nivel de confianza determinado $(1-c)$, qué porcentaje del valor de la inversión se encuentra en riesgo. Entonces:

$$1 - c = F_{\Delta P}(-VaR) = \int_{-\infty}^{-VaR} f\Delta P(x) dx,$$

Donde $F_{\Delta P}(x) = P(\Delta P \leq x)$ es la función acumulada de la distribución de las ganancias y pérdidas y $f\Delta P(x)$ es la función de densidad de las ganancias y pérdidas

Para medir el VaR se debe seleccionar de manera arbitraria tanto el horizonte temporal de tenencia como el nivel de confianza. Sin embargo el Comité de Basilea propuso usar un 99% de intervalo de confianza sobre un horizonte temporal de 10 días.

Un modelo matemático para medir el VaR se compone básicamente de dos partes. Una parte es el modelado correcto de las distribuciones del factor de riesgo analizado y por otra parte, la evaluación de las variaciones del portafolio para los distintos escenarios posibles de los factores de riesgo, a fin de generar la distribución de las ganancias y pérdidas del portafolio. La esencia del VaR es la estimación a cuantiles pequeños de la distribución de los retornos. Existen distintas aproximaciones o técnicas para construir la distribución de los retornos, siendo los más comúnmente utilizados el método paramétrico Delta Normal, simulación histórica, simulación de Monte Carlo. Sin embargo cada uno de estos métodos presenta distintos problemas. El método Delta Normal asume justamente normalidad de la variable, sin embargo las series financieras frecuentemente no se comportan normalmente ya que de la observación empírica de la distribución de las mismas surge claramente la presencia de colas pesadas, exceso de curtosis y asimetría. En consecuencia el método hace subestimar los eventos extremos, es decir las pérdidas. Por otro lado la simulación histórica no supone una distribución de probabilidad de los retornos pero con poca cantidad de observaciones la medida no es confiable en los cuantiles más bajos. El método de Monte Carlo depende de la calidad de los supuestos acerca de las distribuciones de las variables determinantes del riesgo.

Por otra parte existen otras medidas de riesgo como Expected Shortfall (ES) que se encuentra más relacionada a la distribución de la cola de la distribución y en consecuencia es más sensible para captar el comportamiento de la misma respecto de la medida VaR. El ES se define como la pérdida (L) esperada calculada partir de las pérdidas por encima del VaR. Es decir,

$$\text{Expected Shortfall} = E(L / L > VaR)$$

El ES es un ejemplo de medida coherente en el sentido de Artzner (1997, 1999), contrariamente al VaR, ya que cumple con la propiedad de subaditividad⁵.

Como se ha indicado, es esencial que la metodología utilizada para la valuación del VaR logre capturar el comportamiento que se observa frecuentemente en las series financieras como ser colas pesadas en las distribuciones de los retornos, asimetría curtosis, volatilidad no constante en el tiempo y dependencia de corto y largo alcance. Existe abundante evidencia de los beneficios de utilizar distribuciones de tipo α estables⁶⁷ para

⁵ El riesgo total de la cartera debería ser inferior o igual a la suma de los riesgos de todos los subcarteras.

⁶ Ver Anexo 3 para descripción de esta familia de distribuciones.

aproximar las distribuciones de probabilidad de los retornos de las carteras financieras. Dada la naturaleza leptocurtica y de colas pesadas de estas series, las distribuciones de la familia Pareto estables parecen las más adecuadas para ajustar correctamente estos procesos. En estudios empíricos el modelado de series de retornos financieras se hace típicamente con distribuciones estables con parámetro $1 < \alpha < 2$. Adicionalmente y a partir de estudios realizados en 2004 por Gettinby, Sinclair, Power, Brown y otros investigadores, han demostrado que la distribución Logística Generalizada ajusta y modela satisfactoriamente los valores extremos de las series de tipo financieras mientras que Nidhin y Chandran (2013) demuestran que las propiedades de esta última distribución comparten las bondades con las distribuciones de tipo α estables.

3.2. Medición de riesgo sobre cartera.

En esta sección se medirá el riesgo de tasa de interés que posee una cartera sencilla e hipotética que sólo posee este único factor de riesgo.

Al producirse variaciones o cambios en las tasas de interés las entidades pueden enfrentarse al riesgo de que se modifiquen sus activos y pasivos, por lo que se vería afectada negativamente su situación económica. El riesgo es aún mayor si existe un descalce entre la vida promedio de los activos respecto de los pasivos.

Los ingresos financieros netos pueden verse modificados en mayor o menor medida dependiendo de la exposición a la tasa de interés y al grado de descalce en el plazo promedio de sus activos respecto de sus pasivos. En consecuencia se construyó un portafolio hipotético y sencillo que consiste en un préstamo a tasa fija a 24 meses con amortizaciones mensuales y depósitos a plazo fijo que se pactan mensualmente y pagan tasa Badlar Bancos Privados. Se supone que ya existe un portafolio de activos y pasivos y mes a mes se adiciona un pasivo marginal.

Se calculará el Valor en Riesgo a un día y el Expected Shortfall al 99% y 95% de confianza de los distintos Valores Presentes de Ingresos Netos que se simularon a partir de las 1000 simulaciones de ETTI que se obtuvieron en 2.2.

Figura 15: Calculo del Riesgo por Tasa de Interés

VP Promedio	VaR 5%	Expected Shortfall 5%	VaR 1%	Expected Shortfall 1%	VaR Normal 1%
87,601	-6.49%	-9.40%	-13.02%	-18.13%	-7.95%

⁷ Distribuciones α estables, también denominadas Pareto estables o distribuciones de Pareto –Levy - estables

Figura 16: Ajuste distribución de probabilidades Valores Presentes de Ingresos Netos

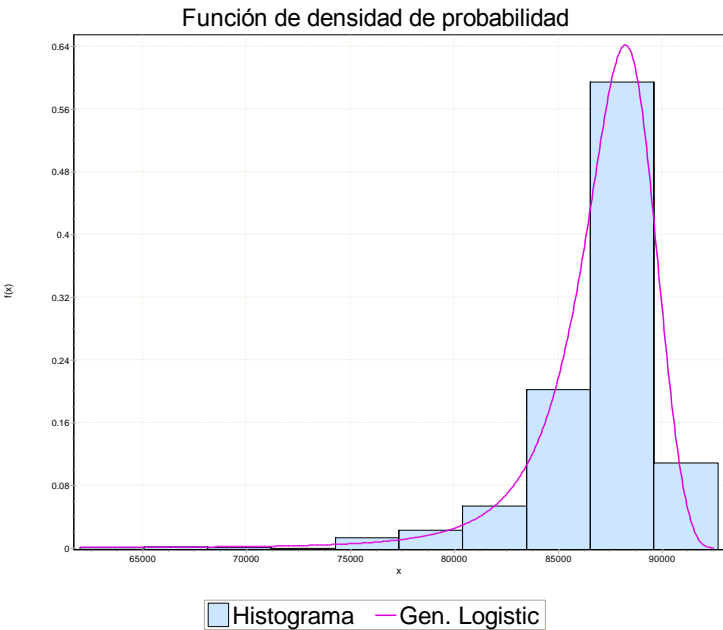


Figura 17: Ajuste distribución de cola al 5%

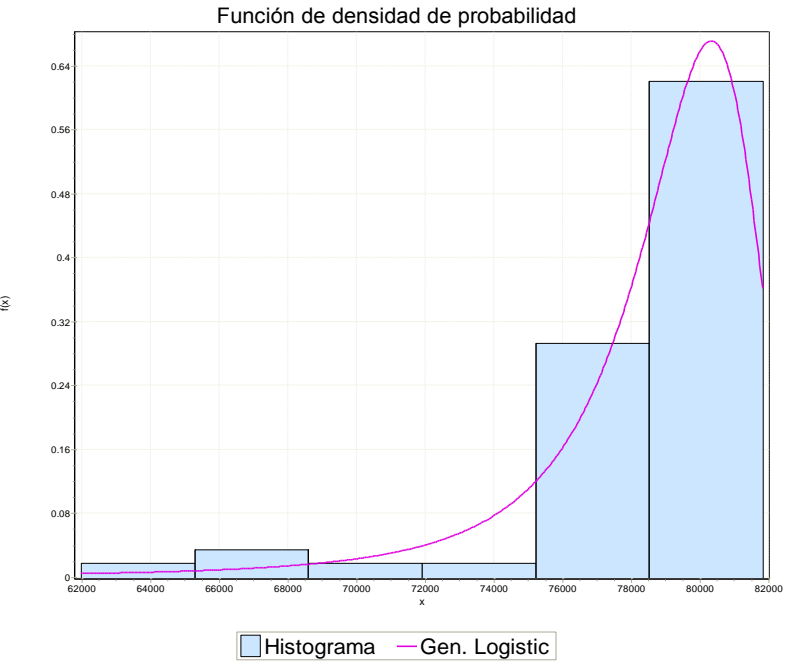
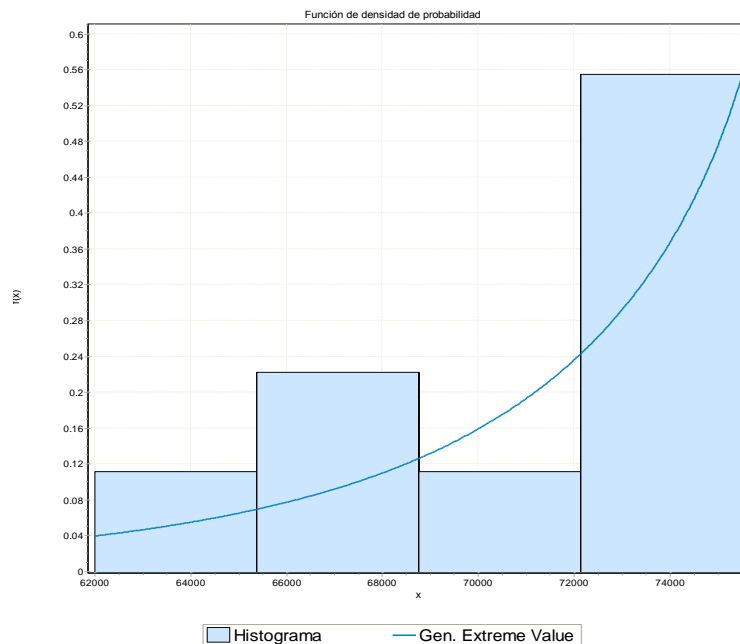


Figura 18: Ajuste distribución de cola al 1%



Si se toma como medida de riesgo el VaR puede decirse que la cartera podría sufrir una disminución de un 13.02% en un día respecto a su valor medio con un 99% de confianza, mientras que se espera perder un 18.13% en el 1% de los peores escenarios, considerando como medida el ES.

Es interesante destacar las distribuciones de probabilidad utilizadas para ajustar los Valores Presentes Netos de la cartera. La distribución con mejor ajuste estadístico tuvo fue la Logística Generalizada tanto para ajustar la distribución empírica completa como la cola al 5%, mientras que la cola al 1% presentó un mejor ajuste con la distribución Valor Extremo Generalizada. Se destacó previamente las bondades y características de estas distribuciones que las hacen apropiadas para modelar los series de tipo financieras. Si se forzara el ajuste y se tomara erróneamente la distribución Normal, claramente el riesgo estaría subestimado ya que el VaR con un 99% de confianza indica una pérdida del 7.95 %.

4. Conclusiones

En el presente trabajo se aplicó una metodología para medir el riesgo de tasa de interés en una cartera que por construcción está limitada a ese único factor de riesgo. Para realizar dicha tarea se generaron múltiples escenarios a partir de la simulación en todos sus plazos de vencimiento de la estructura temporal de tasas de interés guardando coherencia entre los mismos. En el cálculo de las medidas de riesgo se avanzó en la aplicación de distribuciones de probabilidades que han permitido la representación de las características de exceso de curtosis, asimetría y colas pesadas típicas de los retornos financieros y la consideración de escenarios extremos. La comparación de los resultados alcanzados mediante la utilización de la distribución de probabilidades normal y las distribuciones alfa-estables revela la importancia de su consideración en la toma de decisiones. En una etapa siguiente de investigación se avanzará hacia el estudio del riesgo de tasa de interés en carteras más sofisticadas.

Apéndice de cuadros y gráficos

Anexo 1: Ejemplo de estimación de coeficientes por Nelson y Siegel

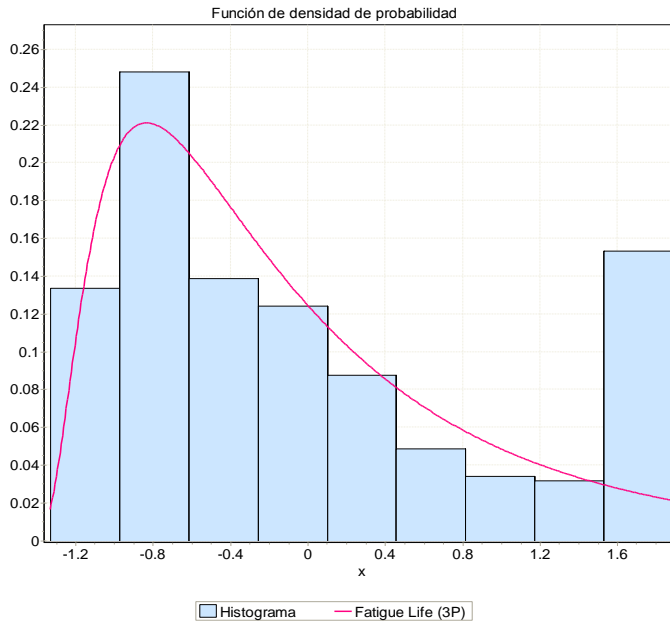
Se presenta a modo de ejemplo de la estimación por Nelson y Siegel el caso del día 8/06/10. Para cada valor posible de τ , se exponen los resultados de los coeficientes estimados β_1 , β_2 , β_3 y se destaca la combinación de τ , β_1 , β_2 , β_3 que genera la mínima suma de errores al cuadrado entre los valores observados y los valores estimados de tasas.

09/06/2010				
Taus	Beta1	Beta2	Beta3	Error
1	0.14207	3489.05	-3495.340000	0.050933600
1.365	0.14194	-5051770	5051770.000000	0.001686790
1.73	0.14597	1423530	-1423530.000000	0.000951507
2.095	0.14597	69387.2	-69388.400000	0.000950906
2.46	0.14597	8290.81	-8291.810000	0.000950772
2.825	0.14597	1715.45	-1716.320000	0.000950420
3.19	0.14598	509.004	-509.774000	0.000949707
3.555	0.14599	193.77	-194.462000	0.000948492
336.8	0.19427	-0.0921354	-0.0001963	0.000002893
337.17	0.19427	-0.0921372	-0.0001001	0.000002893
337.53	0.19427	-0.092139	-0.0000039	0.0000028932
337.9	0.19428	-0.0921407	0.0000924	0.000002893
338.26	0.19428	-0.0921422	0.0001888	0.000002893
338.63	0.19428	-0.0921437	0.0002853	0.000002893
338.99	0.19428	-0.092145	0.0003818	0.000002893
339.36	0.19428	-0.0921462	0.0004785	0.000002893
339.72	0.19428	-0.0921473	0.0005752	0.000002893
340.09	0.19429	-0.0921484	0.0006720	0.000002893
340.45	0.19429	-0.0921493	0.0007689	0.000002893
340.82	0.19429	-0.0921501	0.0008658	0.000002893
341.18	0.19429	-0.0921508	0.0009629	0.000002893
341.55	0.19429	-0.0921514	0.0010600	0.000002894
341.91	0.19429	-0.0921518	0.0011572	0.000002894
342.28	0.19429	-0.0921522	0.0012545	0.000002894
491.93	0.18563	-0.0833623	0.0486689	0.000003160
492.29	0.18559	-0.0833191	0.0488040	0.000003161
492.66	0.18554	-0.0832758	0.0489393	0.000003162
493.02	0.1855	-0.0832323	0.0490746	0.000003163
544.85	0.1783	-0.0759909	0.0693002	0.000003296
545.22	0.17825	-0.0759323	0.0694498	0.000003297
545.58	0.17819	-0.0758737	0.0695994	0.000003298
545.95	0.17813	-0.0758149	0.0697492	0.000003299
546.31	0.17807	-0.075756	0.0698991	0.000003300
546.68	0.17801	-0.075697	0.0700491	0.000003301
680.27	0.14941	-0.0469879	0.1317920	0.000003639
680.63	0.14931	-0.04689	0.1319790	0.000003640
681	0.14921	-0.046792	0.1321670	0.000003640
681.36	0.14911	-0.0466939	0.1323550	0.000003641
681.73	0.14902	-0.0465957	0.1325430	0.000003642
743.41	0.13094	-0.0284735	0.1657860	0.000003786
743.78	0.13082	-0.0283572	0.1659920	0.000003787
744.14	0.1307	-0.0282408	0.1661970	0.000003788
744.51	0.13059	-0.0281244	0.1664030	0.000003789
744.87	0.13047	-0.0280078	0.1666090	0.000003790

Anexo 2: Análisis de las distribuciones de probabilidad que siguen los coeficientes de N&S

Figura A2.1: Ajuste distribución coeficiente Tau (τ) y tests de Bondad de ajuste

Luego de evaluar múltiples distribuciones de probabilidad se decidió considerar la distribución *Fatigue Life*, ya que resultó tener el mejor ajuste.



Bondad de ajuste

Fatigue Life (3P)					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	0.07055				
Valor P	0.0318				
Rango	4				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	0.05293	0.06033	0.06699	0.07488	0.08035
Rechazar?	Sí	Sí	Sí	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	3.375				
Rango	1				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	Sí	Sí	Sí	Sí	No

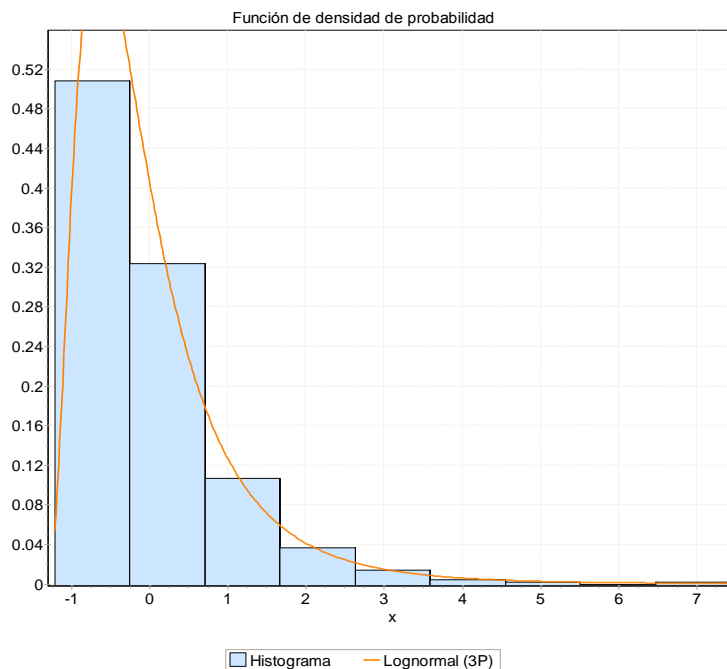
La distribución de probabilidad de Birnbaum-Saunders es conocida comúnmente como la distribución *Fatigue Life*. Esta distribución fue originalmente propuesta como un

modelo de duración o vida para materiales sujetos a patrones cíclicos de estrés y tensión, donde el fracaso final del material proviene del crecimiento de una falla importante. La formula general de la función de densidad de la distribución es:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{\frac{x-\gamma}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{x-\gamma}}}{2\alpha(x-\gamma)} \right) * \phi \left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x-\gamma}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\gamma}} \right) \right), \text{ con } x > \mu; \beta, \gamma > 0$$

Donde α es el parámetro de forma, γ es el parámetro de locación, β es el parámetro de escala, ϕ es la función de densidad de la distribución normal estándar y Φ es la función de distribución acumulada de la distribución normal estándar.

Figura A2.2: Ajuste distribución coeficiente β_1 y tests de Bondad de ajuste



Bondad de ajuste

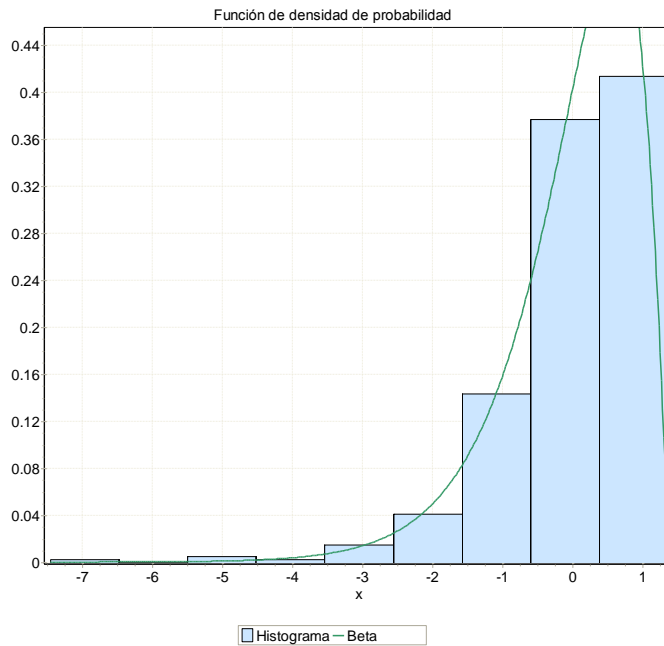
Lognormal (3P)					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	0.0309				
Valor P	0.81561				
Rango	7				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	0.05293	0.06033	0.06699	0.07488	0.08035
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	0.34653				
Rango	5				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No
Chi-cuadrado					
Grados de libertad	8				
Estadística	8.343				
Valor P	0.4007				
Rango	5				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	11.03	13.362	15.507	18.168	20.09
Rechazar?	No	No	No	No	No

La distribución lognormal es utilizada comúnmente para modelar ciclos de vida y tiempos de reacción y particularmente útil para modelar datos con colas "largas" y asimetría positiva. Existe una estrecha relación entre la distribución normal y lognormal. Si $X = \log(Y - \gamma)$ se distribuye normalmente con media μ y desviación típica σ , entonces la distribución de Y se convierte en una de tres parámetros distribución logarítmica normal con el parámetro $\theta = (\gamma, \mu, \sigma)$. La función de densidad de probabilidad de una lognormal de tres parámetros tales distribución es

$$f(y; \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}(y - \gamma)} \exp \left\{ -\frac{[\log(y - \gamma) - \mu]^2}{2\sigma^2} \right\}, \gamma < y < \infty, \sigma > 0, -\infty < \mu < \infty$$

$f(y; \theta) = 0$, en otros casos

Figura A2.3: Ajuste distribución coeficiente β_2 y tests de Bondad de ajuste



Bondad de ajuste

Beta [#1]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	0.02776				
Valor P	0.9006				
Rango	1				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	0.05293	0.06033	0.06699	0.07488	0.08035
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	0.41826				
Rango	2				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	No	No	No	No	No
Chi-cuadrado					
Grados de libertad	8				
Estadística	6.2434				
Valor P	0.61999				
Rango	4				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	11.03	13.362	15.507	18.168	20.09
Rechazar?	No	No	No	No	No

La formula general de la función de densidad de la distribución beta es:

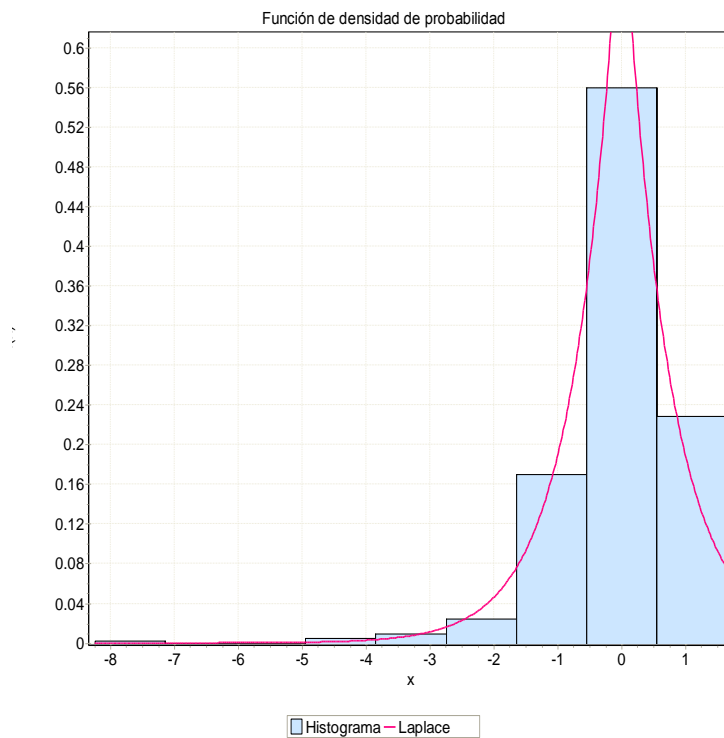
$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \frac{(x-a)^{\alpha_1-1} (b-x)^{\alpha_2-1}}{(b-a)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}, \text{ donde el dominio es } a \leq x \leq b$$

Donde α_1 y α_2 son parámetros de forma, y $B(\alpha_1, \alpha_2)$ es la función Beta.

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt, \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

La función de densidad Beta es una forma muy versátil para representar los resultados como proporciones o probabilidades.

Figura A2.4: Ajuste distribución coeficiente β_3 y tests de Bondad de ajuste



Bondad de ajuste

Laplace [#23]					
Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	0.05079				
Valor P	0.23165				
Rango	2				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	0.05293	0.06033	0.06699	0.07488	0.08035
Rechazar?	No	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Tamaño de la muestra	411				
Estadística	1.7491				
Rango	1				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Rechazar?	Sí	No	No	No	No
Chi-cuadrado					
Grados de libertad	8				
Estadística	9.196				
Valor P	0.32603				
Rango	3				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Valor crítico	11.03	13.362	15.507	18.168	20.09
Rechazar?	No	No	No	No	No

La distribución de Laplace es también conocida como distribución doble exponencial puesto que puede ser considerada como la relación de las densidades de dos distribuciones exponenciales adyacentes. La distribución de Laplace resulta de la diferencia de dos variables exponenciales aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas.

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|\mu - x|)$$

Dónde $-\infty < x < +\infty$, $\lambda > 0$ es el parámetro continuo de escala y μ es un parámetro continuo de locación.

Anexo 3: Descripción de distribuciones estables

Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución estable si existen parámetros $\alpha \in (0,2]$, $\sigma \in [0, \infty)$, $\beta \in [-1, 1]$ y $\mu \in \mathfrak{R}$ tal que la función característica tiene la siguiente forma:

$$\psi_x(t) = \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta(\text{sign}t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} + i\mu t \right) \right\} & \text{para } \alpha \neq 1 \\ \exp \left\{ -\sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}t) \ln |t| + i\mu t \right) \right\} & \text{para } \alpha = 1 \end{cases}$$

Donde α es el índice de estabilidad, β es el parámetro de asimetría, σ es el parámetro de escala y μ el de locación. Si β y μ son cero entonces X es simétrica estable. Adicionalmente si $\alpha = 2$ es la distribución Gaussiana. A menor valor del parámetro α , mayor es la leptocurtosis y el parámetro de locación μ mide la media de la distribución. Los retornos modelados con procesos estables tienen media finita pero varianzas infinitas. Además cumplen con la propiedad de aditividad, es decir que la combinación lineal de variables aleatorias estables independientes, con parámetro de estabilidad α , también es una variable aleatoria con el mismo α .

Al presentar varianzas infinitas, no puede estimarse el riesgo con la varianza y la dependencia con las correlaciones, sin embargo existe el concepto de variación y covariación que puede estimarse en estas distribuciones.

Bibliografia

- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.M., HEATH, D. (1997). *Thinking Coherently*. Risk 10, pp, 68-71
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.M., HEATH, D. (1999). *Coherent Measures of Risk*. Mathematical. Finance 9(3),pp. 203-228.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, (2009), *Revisions to the Basel II market risk framework*, BIS
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION, (2014), *Consultative Document: Fundamental Review of the trading book: A revised market risk framework*, BIS
- BIS, (2005), *Zero-coupon yield curves: technical documentation*, Basel, Bank of International Settlements.
- BLACK, F, Scholes, M. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81, pp. 637-654.
- BLACK, F., DERMAN, E., TOY, W., (1990), *A One Factor Model of Interest Rates, and Its Applications to Treasury Bond Options*, Financial Analysts Journal Vol.46, pp. 33 - 39.
- CORNEO, L., NYHOLM, K., VIDOVA-KOLEVA, R., (2008) *How Arbitrage - Free is the Nelson and Siegel Model?* Working Paper Series No 874, Frankfurt, European Central Bank,
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS S. A., (1985), *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, Vol. 53, No. 2, pp. 385-407.
- DIEBOLD, F. X., LI, C., (2006), *Forecasting the term structure of government bond yields*, Journal of Econometrics, Vol.130, pp.337 – 364.
- DI MATTEO, T., ASTE, T., (2001), *How does the Eurodollar Interest Rate Behave?*, eprint arXiv:cond-mat/0101009,
- DUFFIE, D., KAN, R., (1996), *A Yield –Factor Model of Interest Rates*, Mathematical Finance, Vol. 6 No. 4, pp. 379 – 406.
- FABOZZI, FJ, MARTELLINI, L, PRIAULET, P. (2005), *Predictability in the Shape of the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Fixed Income 15-1 pp. 40-53.
- FAMA, E F, BLISS, R. R (1987), *The Information in Long-Maturity Forward Rates* American Economic Review, 77(4), pp. 680–692.
- FERGUSON, R., RAYMAR, S.B. (1998), *A Comparative Analysis of Several Popular Term Structure Estimation Models*, Journal of Fixed Income, Vol. 7, No. 4, 1998, 17-33.
- HEATH, D., JARROW, R., MORTON, A., (1992), *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation*. Econometrica, Vol. 60, No. 1, pp. 77 - 105.
- HULL, J., WHITE, A., (1990), *Pricing Interest-Rate - Derivative Securities*, The Review of Financial Studies Vol. 3, No. 4, pp. 573 - 392.

- NELSON, C., SIEGEL, A., (1987), *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, Journal of Business Vol. 60, pp. 473 - 489.
- NIDHIN, K., CHARDRAN, C. (2013), *Importance of Generalized Logistic Distribution in Extreme Value Modeling*, Applied Mathematics, 4. pp. 560-573.
- MARKOWITZ, H. M., (1952), *Portfolio Selection*, Journal of Finance, vol 7. pp. 77-91.
- MARKOWITZ, H. M. (1959) *Portfolio Selection*, Wiley, New York
- MÁRQUEZ DIEZ-CANEDO, J. NOGUÉS NIVÓN, C, VÉLEZ GRAJALES, V.(2003) *Un Método Eficiente para la Simulación de Curvas de Tasas de Interés*. Banco de México.
- MARTELLINI, L., MEYFREDI, J. C., (2007), *A Copula Approach to Value-at-Risk Estimation for Fixed-Income Portfolios*, Working Paper EDHEC Risk and Asset Management Research Centre.
- MCNEIL, A. J., FREY, R. EMBRECHTS, P. *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, Princeton.
- MERTON, R. (1969), *Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous-Time Case*, Review of Economic and Statistics. 51. pp. 247-254.
- RACHEV, S. (2003), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier, Netherlands.
- ROMERO MEZA, R.(2005) *Medidas de Riesgo Financiero*, Revista de Economía y Administración p57-63, Universidad de Chile.
- SVENSSON, L. E., (1994), *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992 – 1994*, NBER Working Paper No 4871.
- VASICEK, O, (1977), *An Equilibrium Characterization of The Term Structure*, Journal of Financial Economics Vol. 5: 177-188.