ASOCIACION ARGENTINA DE ECONOMIA POLITICA

LIV REUNIÓN ANUAL| NOVIEMBRE DE 2019

Bienes Inferiores
Segundas Marcas y Utilidad

Acosta, Jorge Alan

ISSN 1852-0022 / ISBN 978-987-28590-7-7

Bienes inferiores: Segundas marcas y utilidad

Alan Acosta
Universidad de San Andrés

30 de agosto de 2019

Resumen

En este trabajo se propondrá una función de utilidad para representar preferencias sobre bienes normales e inferiores, en particular, los correspondientes a primeras y segundas marcas. Se argumentará que, para captar el comportamiento que se espera del consumidor respecto a estos bienes (una dependencia inicial positiva respecto del ingreso, pero negativa a partir de cierto punto), las preferencias no deben ser convexas. Además, se utilizará el modelo para mostrar que la demanda agregada de segundas marcas es sensible a cambios en la distribución del ingreso, así como los beneficios de las empresas que proveen esos bienes.

Palabras clave: Bienes inferiores, utilidad, distribución del ingreso.

Clasificación JEL: D11, D42.

1. Introducción

A partir de la teoría del consumidor pueden representarse distintos comportamientos que se derivan de preferencias observables con cierta regularidad empírica. Algunos ejemplos de ello pueden ser los correspondientes a bienes sustitutos, complementarios, los no deseables, etc. En general, estos comportamientos se han modelado con una función de utilidad, de las cuales se pueden derivar demandas consistentes con los comportamientos que tienden a observarse.

En particular, el análisis de la estática comparada sobre las demandas que surgen del problema de maximización de utilidad permite distinguir distintos tipos de bienes: Dos casos interesantes corresponden a los bienes Giffen e inferiores. Mientras un bien es Giffen si, céteris paribus, al aumentar su precio aumenta la cantidad demandada, se dice que es inferior cuando, céteris paribus, disminuye su demanda al aumentar el ingreso. Para los primeros, no parece haber un correlato empírico claro, aunque algunos autores indican que se han podido observar. En el caso de los bienes inferiores, se sugieren ejemplos claros, como el caso de las segundas marcas, que son bienes que pueden cumplir la misma función que otro, pero para los cuales los agentes tienen una percepción inferior acerca de su calidad, efectividad, o de la satisfacción que se puede obtener derivada de su consumo, comparada con las primeras marcas.

En este trabajo el principal objetivo es el de microfundamentar el comportamiento de los consumidores en presencia de primeras y segundas marcas, a partir de la introducción de una función de utilidad que permita representar de manera simple sus preferencias. La introducción de una función de utilidad permitirá, posteriormente, determinar con precisión el comportamiento de la demanda agregada de cada bien, especialmente respecto a la distribución del ingreso. Además, será posible analizar si los beneficios de las firmas que proveen esos bienes depende o no de la distribución del ingreso.

En general, existen productos diferenciados, y en particular un consumidor enfrenta la disyuntiva de elegir entre bienes de distinta calidad (se utilizará, por simplicidad, este término para reflejar otras posibles diferencias). Es muy fácil extraer ejemplos de la realidad que representen esta idea: ¿Coca cola o Manaos? ¿Fernet Branca o 1882?¿Nafta normal o premium? ¿Taxi o transporte público?¿El último iphone o una imitación china?.

Sin embargo, según mi conocimiento, no se ha podido dar con una función de utilidad que pueda representar estos comportamientos de manera sencilla, como sí resultó posible para otros tipos de bienes. La clasificación puede encontrarse ya en Hicks (1946). Al respecto, Haagsma (2012) halló una familia de funciones cuyas demandas poseen la característica de los bienes Giffen (que también deben ser inferiores), aunque la intuición que se deriva de ellas no es consistente con la idea original de la "paradoja de Giffen"(el consumo del bien Giffen está restringido a un intervalo acotado y el comportamiento se da si el ingreso es alto). También se han dado desarrollos similares respecto a bienes inferiores, como el de Liebhafsky (1969), aunque nuevamente la familia de funciones propuesta no parece relacionarse, en términos prácticos, con lo que se observa respecto a segundas marcas (el bien resulta ser inferior para cualquier valor del ingreso). Garrat (1997) plantea que estos tipos de bienes pueden hallarse en presencia de indivisibilidad.

En primer lugar, en este trabajo se mostrará que la elección entre bienes de distinta calidad (donde, normalmente, el bien de menor calidad es el más barato), depende crucialmente del nivel de ingreso. Esto nos permitirá abordar una discusión habitual respecto al comportamiento de las personas: ¿cambian las preferencias a medida que mejoran las condiciones económicas de un individuo? Lo normal es pensar que sí, y es una manera de explicar las diferencias entre los patrones de consumo de las personas de diferentes ingresos. Aquí se mostrará que, en realidad, no es necesario que cambien las preferencias, si no que una misma función de utilidad puede construir un mapa de los distintos planes que un agente tiene para cada nivel de ingreso, contemplando desde el principio a partir de qué nivel de riqueza cambiará el patrón de consumo. Luego, se estudiará el comportamiento de la demanda de mercado para estos bienes, para mostrar que, como es de esperar, dependerán de la distribución del ingreso, y no solo del nivel agregado del mismo. Finalmente, se analizarán las implicancias de estas preferencias en un contexto de organización industrial, con foco en cómo los beneficios de la firmas dependen de la distribución del ingreso.

2. Bienes inferiores y segundas marcas

Un caso clásico de libro de texto a la hora de hablar de bienes inferiores consiste en el de las segundas marcas. A medida que el ingreso aumenta, el consumidor reduce el consumo de estos bienes y los reemplaza por aquellos de calidad superior (Mas Colell et al. (1995); Varian (1999)). La idea es que estos bienes no son inferiores para cualquier nivel de ingreso, sino que en realidad desde el origen se comportan como bienes normales, y su consumo comienza a disminuir a partir de un punto.

También se propone este comportamiento para bienes que, sin ser idénticos, pueden utilizarse para satisfacer una misma necesidad, pero diferenciándose en términos de confort o algún parámetro de eficiencia (por ejemplo, taxis versus transporte público). Sin embargo, en esos textos no es provista función de utilidad alguna cuyas demandas sean consistentes con este tipo de comportamiento. La idea de la dependencia del ingreso es que, en principio, hay una necesidad que satisfacer (de primer orden), y para ello debe ser consumida, al menos, una cierta cantidad del bien (ya sea el de mayor o el de menor calidad). Sin embargo, los bienes de mayor calidad suelen tener un precio mayor, y para un nivel de ingreso bajo puede no ser posible, a pesar de percibir la diferencia de calidad, acceder a una cantidad lo suficientemente grande que permita satisfacer la necesidad de primer orden.

Existen varios bienes que pueden ejemplificar esta idea: Por ejemplo, a la hora de conducir, puede argumentarse que la nafta tiene un mejor rendimiento que el gas natural comprimido en términos de performance y preservación del vehículo, aunque su precio por kilómetro recorrido pueda ser mayor. Lo que se observa es que existe un mercado para ambos. Aunque la calidad, estrictamente hablando, no es el único motivo que puede distinguir cómo dos bienes distintos pueden satisfacer la misma necesidad. Existe literatura acerca de productos cuyo proceso de fabricación tiene menos impacto en términos ecológicos que los productos tradicionales. Por ejemplo, en la actualidad está en auge la industria de autos eléctricos. También, para ciertos productos agropecuarios, un factor distintivo puede ser la etiqueta de artesanal, e incluso el consumidor puede interesarse, por diversos motivos, en el lugar donde fueron producidos: Una razón puede ser que la región tradicionalmente se haya destacado como productor del bien en cuestión, pero también puede existir cierta percepción de estar ayudando a que economías apartadas puedan desarrollarse (en Argentina, podría hablarse de economías regionales, pero también existe la discusión de empatía con países de bajos ingresos a nivel mundial). En todos esos casos, las consideraciones previas pueden llevar a pagar un precio mayor por la misma cantidad de unidades. Existe evidencia acerca de estas mayores disposiciones a pagar: Bechetti y Rosati (2007) encuentran una elasticidad ingreso positiva (pero menor a la unidad), para bienes que cuentan con una característica asociada a la responsabilidad social.

Por otra parte, Chyi y Yang (2009), encuentran que las noticias en línea (o a través de redes sociales), se consumen menos a medida que aumenta el ingreso, manteniendo lo demás constante. Los periódicos siguen obteniendo sus principales ingresos a través de la versión en papel.

También se ha discutido la elección entre salud pública y privada. En rigor, la salud privada se consume más a medida que aumentan los ingresos, por lo que se podría considerar a la salud pública como un bien inferior. Al respecto, Khan y Mahamud (2015) analizaron la elasticidad ingreso ingreso de la salud privada en países del sudeste asiático, encontrando que un aumento de un punto porcentual en el PBI per cápita está vinculado a un incremento en el gasto en salud privada de un 1,128 %.

En el siguiente apartado, se presentará una familia de funciones de utilidad que permitirán captar esta idea. Por ejemplo, si las opciones son, supongamos, que se pueden consumir 3 unidades del bien de calidad inferior o 1 del de la primera marca, quizás sería conveniente optar por las tres unidades. Ahora, si el nivel de ingreso permite optar entre 6 y 18, pueden ser preferibles las 6, dado que se satisface la necesidad de primer orden y otras cuestiones se vuelven relevantes.

3. Una función de utilidad para representar segundas marcas: El caso de dos bienes

En este apartado se introducirá el modelo, para el caso de dos bienes, a partir del cual se intentará captar el comportamiento de un agente que debe elegir entre primeras (bien 2) y segundas marcas (bien 1). La función de utilidad a considerar es:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \eta(x_2)$$

Para la función $\eta(x_2)$ serán realizados los siguientes supuestos:

1. Es diferenciable con continuidad hasta segundo orden
2. $\eta(0) = 0$
3. $\eta'(0) = 0$
4. $\eta'(x_2) > 0 \ \forall x_2 > 0$
5. $\eta''(x_2) > 0 \ \forall x_2 \geq 0$

Si bien estos supuestos son restrictivos, definen una familia realmente amplia de funciones de utilidad cuyas demandas tendrán un comportamiento particular (en la sección siguiente se analizará un ejemplo). La clave está en la convexidad de la función $\eta(x_2)$, ya que esa característica determina que las curvas de indiferencia serán cóncavas al origen: Sea

$$k = x_1 + \eta(x_2)$$

La expresión de la curva de indiferencia correspondiente a un nivel de utilidad $k > 0$. A partir de aquí puede definirse explícitamente una relación entre x_1 y x_2, tal que:

$$x_1 = k - \eta(x_2)$$

Y su concavidad viene dada por:

$$x_1'' = -\eta''(x_2) < 0$$

La concavidad de las curvas de indiferencia está intrínsecamente relacionada con la no existencia de solución interior para el problema de maximización de utilidad (en el apéndice se provee una prueba formal):

Teorema **1 (Solución de esquina)** *Si las preferencias de un agente pueden ser representadas por la función de utilidad $U(x_1, x_2) = x_1 + \eta(x_2)$, siendo $\eta(x_2)$ una función estrictamente convexa, el problema de maximización de utilidad no tiene solución interior.*

El análisis a partir de una función arbitraria ($\eta(x_2)$) puede resultar algo complejo. Sin embargo, los supuestos realizados nos permitirán hallar resultados generales, que se resumen en el siguiente teorema (véase el apéndice para una prueba formal):

Teorema **2 (Ingreso de corte)** *En la solución del problema de maximización de utilidad del agente, existe un nivel de ingreso m^* tal que si $m > m^*$ es óptimo asignar todo el ingreso al bien 2, mientras que es óptimo consumir solo el bien 1 si $m < m^*$. Si $m = m^*$ el agente está indiferente entre ambas esquinas.*

En conclusión, si el ingreso es muy pequeño, el bien a consumir es el de segundo rango (es decir, el bien 1), dado que las cantidades que pueden adquirirse del bien superior no son lo suficientemente significativas como para que valga la pena adquirirlo. A medida que el ingreso aumenta, mientras no se haya alcanzado el punto de corte, irá aumentando el consumo de la segunda marca (no hay, por el momento, una mejor opción). Sin embargo, una vez superado el umbral, comienza a valer la pena adquirir el bien superior, y a partir de ahí el consumo del bien 1 se reduce a 0.

Si bien este tipo de comportamiento muchas veces es presentado como un cambio en las preferencias, lo que aquí se prueba es que, por el contrario, es una cuestión de ingresos, ya que existe una función de utilidad capaz de contemplar ambos escenarios. El agente simplemente tiene un plan para cada uno de los ingresos que puede enfrentar, y su comportamiento dependerá, esencialmente, de si el mismo está por debajo o por encima del punto de corte m^*.

Finalmente, la convexidad de $\eta(x_2)$ garantiza que ese punto de corte es único. Una vez superado, siempre será preferible gastar todo el ingreso en el bien 2.

4. Análisis de un caso específico

En este apartado será presentada una función de utilidad, como caso particular de lo expuesto en la sección previa, que intentará explicar el comportamiento de un consumidor cuando enfrenta la elección entre primeras y segundas marcas. Luego, podremos incorporar un mayor nivel de detalle con el fin de sumar realismo. El ejemplo base puede verse con la función:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

Comencemos analizando las características básicas de esta función de utilidad. En primer lugar, podemos decir que representa preferencias monótonas, ya que al aumentar el consumo de cualquier bien (céteris paribus), la utilidad aumenta. Formalmente:

$$U'_{x_1} = 1 > 0$$
$$U'_{x_2} = 2x_2 \geq 0$$

En la sección anterior mostramos que estas preferencias no son convexas. Si bien la estructura de la función puede parecer similar a la de aquellas que representan preferencias cuasilineales, la gran diferencia radica en que la derivada segunda respecto al argumento no lineal, es positiva (igual a 2), representando una función convexa, en lugar de la concavidad requerida para las preferencias cuasilineales clásicas. La no convexidad de las preferencias puede verse de manera sencilla a través de sus curvas de indiferencia. Las mismas se definen por:

$$k = x_1 + x_2^2$$

Para todo $k \geq 0$. La misma puede reescribirse como:

$$x_1 = k - x_2^2$$

Ahora podemos analizar el signo de sus derivadas de manera explícita:

$$x_1' = -2x_2 \leq 0$$
$$x_1'' = -2 < 0$$

El signo negativo de la derivada segunda indica que las curvas de indiferencia son cóncavas al origen, en lugar de la convexidad requerida para las curvas clásicas. Así, tendremos solución de esquina, que en este caso puede precisarse:

El problema a resolver por el consumidor será:

$$\underset{x_1, x_2}{max} \; x_1 + x_2^2$$

s.a:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Siendo

$$p_1 > 0,\, p_2 > 0,\, m > 0$$

Para este caso, también se puede mostrar de manera directa que no hay solución interior. Las condiciones de primer orden (necesarias para una solución interior) vienen dadas por:

$$1 - \lambda p_1 = 0$$

$$2x_2 - \lambda p_2 = 0$$

Siendo λ el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción presupuestaria. Sin embargo, para que en cualquier punto que cumpla la condiciones de primer orden se alcance un máximo, deben cumplirse también las condiciones de segundo orden. Estas pueden verificarse mediante el signo del siguiente determinante (Hessiano orlado):

$$\tilde{H} = \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2p_1^2 < 0$$

Este resultado indica que, de encontrar un punto que satisfaga las condiciones de primer orden, este no representaría un máximo restringido, si no un mínimo, como se había establecido en la versión general.

Como el teorema de Weisstrass garantiza que habrá solución, esta debe ser de esquina, cumpliéndose la restricción presupuestaria con igualdad (ya que las preferencias son monótonas). Esto deja solo dos posibilidades: O el agente gastará todo el ingreso en el bien 1, o lo hará en el bien 2, pero ¿Qué esquina elegir? La respuesta es que se deberá escoger la que proporcione mayor utilidad. En la figura 1 puede verse cómo, en cualquier caso, la solución es de esquina, dada la concavidad al origen de las curvas de indiferencia, y cómo la esquina óptima puede cambiar al modificarse el ingreso.

Es fácil ver que gastar todo el ingreso en el bien 1 proporcionará una utilidad de $\frac{m}{p_1}$, mientras que con la segunda esquina se obtendrá $\frac{m^2}{p_2^2}$. Por lo tanto, para que sea óptimo gastar todo el ingreso en el bien 1 se debe cumplir que:

$$\frac{m}{p_1} \geq \frac{m^2}{p_2^2}$$

Lo que se reduce a:

$$m \leq \frac{p_2^2}{p_1}$$

De lo que se deduce que el ingreso de corte $m^* = \frac{p_2^2}{p_1}$. El incumplimiento de esta condición hará que solo sea óptimo gastar el ingreso en el bien 2 (la igualdad se deriva en la indiferencia entre las dos esquinas). Así, las demandas marshallianas para los bienes 1 y 2 resultan:

$$x_1^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0 & si \quad m \geq \frac{p_2^2}{p_1} \\ \frac{m}{p_1} & si \quad m \leq \frac{p_2^2}{p_1} \end{cases}$$

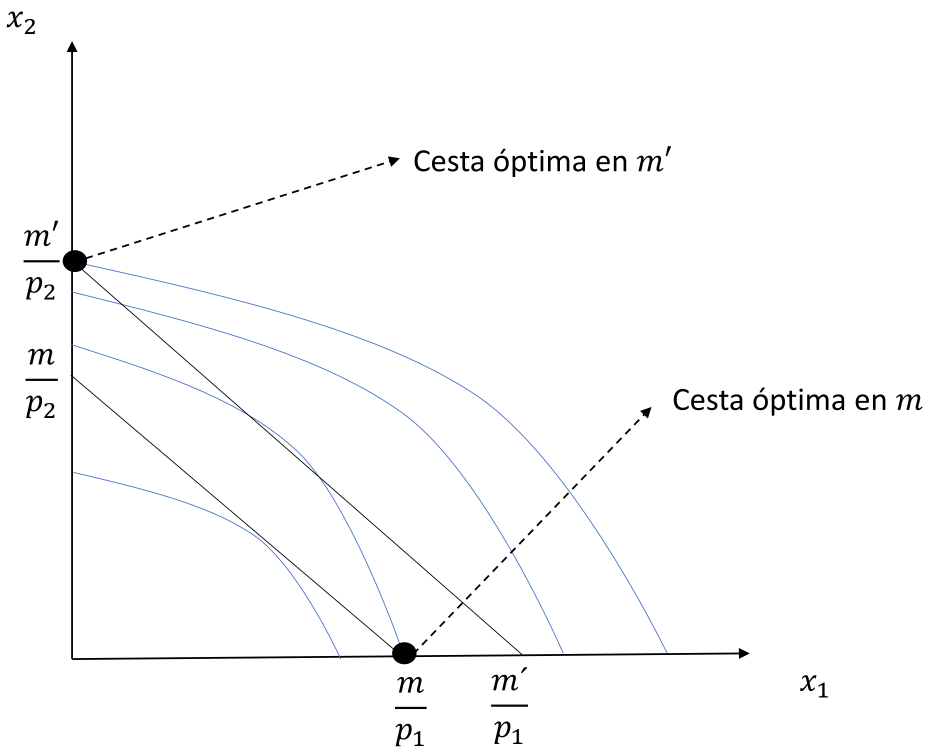

Figura 1: Elección óptima para distintos niveles de ingreso

$$x_2^*(p_1, p_2, m) = \begin{cases} \dfrac{m}{p_2} & si \quad m \geq \dfrac{p_2^2}{p_1} \\ 0 & si \quad m \leq \dfrac{p_2^2}{p_1} \end{cases}$$

Como puede notarse, la demanda del bien 1 resulta ser una correspondencia (también lo es la del bien 2), ya que existen dos soluciones cuando $m = m^* = \frac{p_2^2}{p_1}$: 0 y $\frac{m}{p_1}$. Más aún, resulta que el hecho de demandar o no el bien 1 depende del ingreso, y que si este último es lo suficientemente grande el bien 1 se deja de demandar. Es decir, un aumento del ingreso puede provocar una disminución de la demanda del bien 1 (en este caso a 0), comportamiento que en la literatura se conoce como el de un bien inferior. Sin embargo, para niveles de renta iniciales, la demanda del bien 1 se incrementa con el ingreso. Este es exactamente el comportamiento esperado para una segunda marca. Cuando un consumidor posee niveles de renta reducidos, es de esperar que consuma bienes de calidad inferior, pero que, al incrementar su ingreso, no reduzca necesariamente el consumo de esos bienes, sino que más bien los iría incrementando para obtener una utilidad mayor. Así, la curva de Engel para este tipo de bien debería ser inicialmente creciente, hasta que se alcance cierto punto en el cual sea más conveniente para el consumidor satisfacer sus necesidades con un bien de mayor calidad. A partir de ese punto, la curva de Engel debe proporcionar un valor constante e igual a 0.

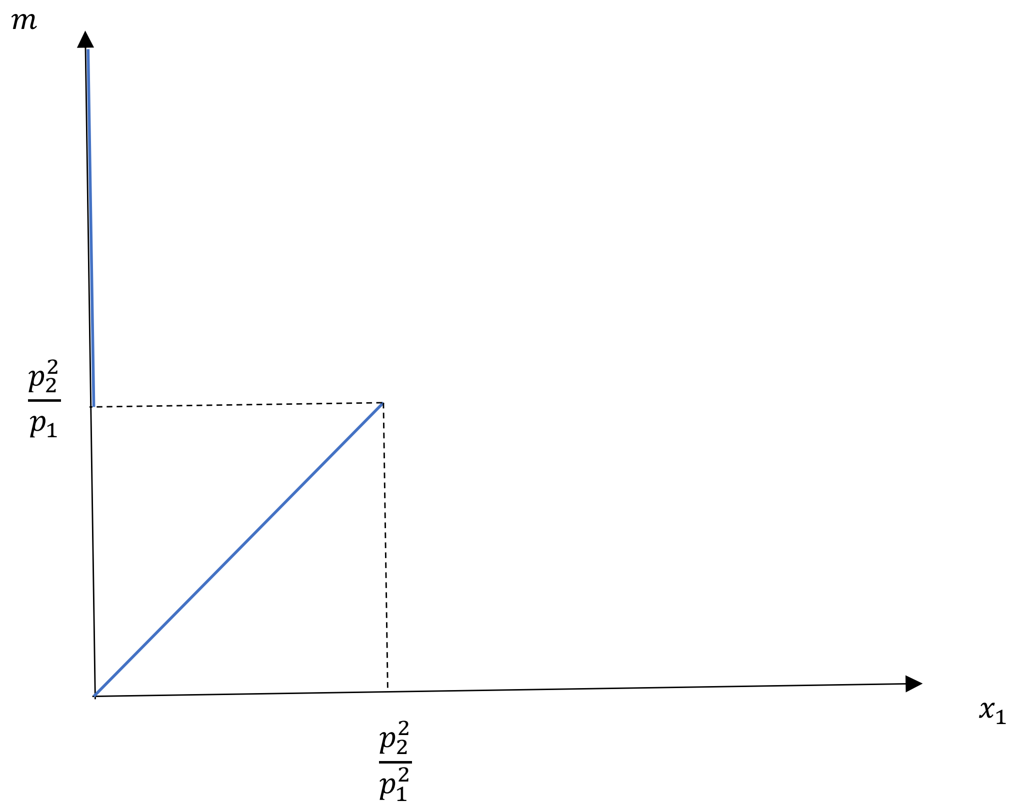

Figura 2: Curva de Engel para segundas marcas

La figura 2 muestra la curva de Engel para el bien 1. Sucede exactamente lo que se había anticipado. Inicialmente, el consumidor elige solo el bien 1, y a medida que aumenta el ingreso su consumo se incrementa linealmente, hasta que m alcanza el punto de corte $m^* = \frac{p_2^2}{p_1}$ A partir de ahí, la demanda del bien 1 es igual a 0. Por ejemplo, si $p_2 = 10$ y $p_1 = 1$, puede verse que solo si el ingreso es superior a 100 no será óptimo consumir el bien 1. Con $m = 50$ consumir solo el bien 1 reportará una utilidad de 50, mientras que las 5 unidades del bien 2 que podrán adquirirse derivarán en una utilidad de 25. Para un ingreso de \$200, estas utilidades consisten en 200 para el bien 1 y $20^2 = 400$ para el bien 2, lo que era de esperar, ya que el ingreso 200 se encuentra por encima del punto de corte.

5. El rol de la relación marginal de sustitución

Posiblemente el principal resultado que se deriva de las preferencias estrictamente convexas es que, para maximizar la utilidad, cualquier solución interior debe llevar a la igualdad entre el valor absoluto de la relación marginal de sustitución (RMS) y la relación de precios. La interpretación de este resultado se deriva de dos ideas: en primer lugar, la RMS indica la valoración subjetiva que el agente le otorga al bien 1, medida en unidades del bien 2, y la relación de precios proporciona exactamente la misma información, pero respecto al mercado (es decir, una tasa objetiva de cambio). Si la solución es interior, la igualdad se deriva de que, en caso contrario, existirían posibilidades de arbitraje: si $|RMS| > \frac{p_1}{p_2}$, entonces el bien 1 sería más valorado y sería conveniente aumentar su consumo, en detrimento de las cantidades consumidas del bien 2, pero ante la desigualdad opuesta, el agente podría aumentar su utilidad consumiendo más del bien 2 (siempre sobre la recta presupuestaria). Solo ante la igualdad, no existirían incentivos a modificar las cantidades consumidas.

Sin embargo, el argumento anterior no es válido cuando las preferencias no son convexas. Para verlo formalmente, necesitamos establecer la expresión de la RMS para la función estudiada:

$$RMS = -\frac{U'_{x_1}}{U'_{x_2}} = -\frac{1}{\eta'(x_2)}$$

El problema radica en que, bajo preferencias estrictamente convexas, el valor absoluto de la RMS es decreciente respecto al bien 1. Es decir, mientras más se lo consume, menos se lo valora en términos del bien 2. Esto genera preferencias por la diversidad. Lo que sucede en este caso es diferente: aumentar el consumo del bien 1, estando en la recta presupuestaria, implicaría una disminución de la cantidad adquirida del bien 2, y esto, como puede observarse, conduce a un aumento del valor absoluto de la RMS. Es decir, mientras más se consume del bien 1, más lo valora el agente en términos del bien 2 (lo mismo ocurre para este último bien). Esto impide que exista una solución interior, ya que siempre conviene alejarse de un punto en el cual se igualen la valoración subjetiva con la objetiva.

Queda por establecer cómo debe ser la relación marginal de sustitución en la cesta óptima. Recordando que no puede darse la igualdad entre el valor absoluto de la RMS y la relación de precios, resulta que: si es óptima la esquina correspondiente al bien 1, la relación debe ser $|RMS| > \frac{p_1}{p_2}$, porque de lo contrario en ese punto sería más valorado el bien 2, y la esquina no sería óptima, lo que es un absurdo. Si la solución corresponde a gastar todo el ingreso en el bien 2, entonces $|RMS| < \frac{p_1}{p_2}$, por razones análogas. De hecho, en este último punto, se tiene que:

$$|RMS| = \frac{1}{\eta'(\frac{m}{p_2})} < \frac{p_1}{p_2}$$

En base a esta condición, queda establecido que el punto de corte es único. Asumamos que es óptimo gastar todo en el bien 2. ¿Qué convendría hacer con un peso extra? Invertirlo en el bien 1 generaría una utilidad de $\frac{1}{p_1}$, mientras que hacerlo en el bien 2 daría $\frac{\eta'(\frac{m}{p_2})}{p_2}$.

Lo mejor es la segunda opción, debido a la desiguldad entre $|RMS|$ y la relación de precios, reordenando:

$$\frac{\eta'(\frac{m}{p_2})}{p_2} > \frac{1}{p_1}$$

Solo resta tener en cuenta que $\eta'(\frac{m}{p_2})$ es una función creciente, por lo que la desigualdad anterior se fortalece a medida que aumenta el ingreso. De aquí se concluye que solo existe un punto de corte para estas preferencias.

6. Generalizaciones: Casos con 3 o más bienes

Al principio de este estudio se había indicado que el consumidor, a la hora de satisfacer sus necesidades, enfrentaba una gama variada de bienes entre los cuales elegir. Sin embargo, también son muchas las necesidades que deben satisfacerse, y de esto se deriva que los agentes no consuman únicamente un bien. En la vida real, tiende a observarse una conducta de diversificación. Por esta razón, se suele requerir que las funciones de utilidad representen preferencias convexas.

Pero los principales resultados mostrados hasta ahora se derivan de preferencias cóncavas. Una vez que el consumidor eligió la calidad óptima, las demás alternativas no se consumen en absoluto. ¿Es posible compatibilizar este comportamiento con la diversificación? De hecho sí. Solo hay que abrir la posibilidad de considerar un mayor número de bienes.

En cualquier texto clásico de microeconomía, se puede hallar un argumento a favor de analizar solo dos bienes en el problema de maximización de utilidad. El principal motivo es que, para la mayoría de las funciones estudiadas, los resultados para más bienes constituyen una generalización de lo que ocurre con dos. Esto sucede para las preferencias Cobb Douglass, Leontief y sustitutos perfectos (posiblemente, las más estudiadas). Pero aquí se argumentará que puede ser relevante, a efectos del análisis, incorporar más bienes.

De hecho, el objetivo de este apartado es demostrar que las ideas analizadas respecto a segundas marcas pueden incorporarse a las preferencias ya conocidas, recuperando la idea de diversificación.

6.1. Preferencias Cobb Douglas

En su versión más general para 2 bienes, estas preferencias se representan a través de la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

Las demandas marshallianas correspondientes a estas preferencias pueden expresarse como:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{\alpha m}{p_1}$$

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{(1-\alpha)m}{p_2}$$

Aquí puede notarse que existen preferencias por la diversidad. El consumidor gasta una proporción fija de su renta en cada bien (α para el bien 1 y $1-\alpha$ para el bien 2). Un comportamiento que, para ciertos bienes, es fácil de observar.

Sin embargo, el propósito de este apartado es mostrar que el análisis de segundas marcas puede ser incorporado a las preferencias habituales. Como primer ejemplo, consideremos la función de utilidad:

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3^2)$$

Dado que estas preferencias son monótonas, la restricción presupuestaria a considerar es:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = m$$

teniendo en cuenta que p_1, p_2 y m son positivas.

Respecto a las demandas óptimas, puede notarse que: primero, la cantidad del bien 1 debe ser positiva, y segundo, también debe serlo, al menos, la de uno de los bienes restantes (de lo contrario, la utilidad sería 0, y el agente podría incrementarla redistribuyendo el gasto). Sin embargo, es remarcable que las cantidades de los bienes 2 y 3, no pueden ser ambas positivas, en el punto óptimo.

Para probarlo se recurrirá al método del absurdo: supongamos que, en el óptimo, se verifica que $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ y $x_3^* > 0$. Para mostrar la contradicción es necesario introducir un problema auxiliar. Si el consumidor maximiza la utilidad en el punto anterior, también debe ser cierto que, fijando $x_1 = x_1^*$, la máxima utilidad debería conseguirse bajo x_2^* y x_3^* (de lo contrario, el agente podría obtener más utilidad en el problema original, consumiendo x_1^*). A su vez, podemos considerar el ingreso residual que puede destinarse a los bienes 2 y 3 como: $m' = m - p_1x_1^*$, y resolver el problema:

$$\max_{x_2, x_3} \; x_1^*(x_2 + x_3^2)$$

s.a:

$$p_2x_2 + p_3x_3 = m'$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

Siendo

$$p_2 > 0, \, p_3 > 0, \, m' > 0$$

Ahora debe notarse que, dada la positividad de la constante x_1^*, la función objetivo resulta ser una transformación monótona de la que fue analizada como ejemplo inicial. Esto quiere decir que la solución de este problema tendrá las mismas características, y la principal era que no existía solución interior. Por lo tanto, queda probado que en el problema original, no puede darse al mismo tiempo que $x_2^* > 0$ y $x_3^* > 0$.

Sabemos que la demanda del bien 1 debe ser positiva, y que al menos debe serlo también la de alguno de los bienes restantes. Esto deja dos opciones: En el óptimo no se consume el bien 2 o el bien 3. En el primer caso, la utilidad será:

$$U(x_1, x_3) = x_1x_3^2$$

mientras que, en el segundo, tendremos:

$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Ambas funciones representan preferencias Cobb Douglas cuyas demandas son conocidas, las opciones son:

$$x_1^* = \frac{m}{3p_1} \quad x_3^* = \frac{2m}{3p_3}$$

y

$$x_1^* = \frac{m}{2p_1} \quad x_2^* = \frac{m}{2p_2}$$

Ambas posibilidades pueden considerarse de esquina, en el sentido de que la cantidad de algún bien es igual a 0. Así, solo queda establecer bajo qué condiciones es óptima cada esquina. Comencemos preguntándonos por la primera opción, y para ello debe cumplirse que:

$$\frac{m}{3p_1} * (\frac{2m}{3p_3})^2 \geq \frac{m}{2p_1} * \frac{m}{2p_2}$$

Lo que se reduce a:

$$m \geq \frac{27p_3^2}{16p_2}$$

Una expresión análoga a la hallada para el caso de 2 bienes. Será óptimo consumir los bienes 1 y 3 solo si el ingreso es lo suficientemente grande. Además, mayor deberá ser mientras más grande sea el precio del bien 3, y menor mientras más caro sea el bien 2.

La principal intuición detrás de estos resultados es que puede considerarse al bien 2 inferior, en el sentido de que, a partir de cierto ingreso, su consumo disminuirá a 0 (en favor del bien 3). Pero por otro lado, hemos conseguido cuadrar perfectamente el comportamiento de un consumidor frente a distintas marcas (que se distinguen en calidad) dentro de una función de utilidad conocida. Un ejemplo práctico podría ser aquel en el cual un consumidor debe elegir alimento y vestimenta, pero dispone de dos alternativas de calidad para el último grupo (bienes 2 y 3). Si su ingreso es bajo, se volcará a la opción inferior (el bien 2), pero de todos modos deberá combinar eso con una alimentación suficiente. Lo mismo ocurre si el ingreso es alto, pero en este caso el consumidor se volcará al bien de mayor calidad (el 3), luego de haber superado el punto de corte. Es de esperar que, en la práctica, el bien inferior sea más barato, pero aún así el punto de corte existirá.

Otras generalizaciones también pueden considerarse, por ejemplo, con dos calidades para alimentos, se puede pensar la siguiente función de utilidad:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2^2)(x_3 + x_4^2)$$

Aquí se podrían considerar como inferiores a los bienes 1 y 3, donde dependiendo de los precios, se podrían encontrar dos puntos de corte: uno para los bienes 1 y 2, y otro para los restantes, lo que nos dejaría con varias combinaciones: bienes 1 y 3, 1 y 4, 2 y 3, y 2 y 4 (este último escenario se esperaría para los ingresos más altos). Además, se puede pensar en una versión algo más general, para 4 bienes:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + \eta_2(x_2))(x_3 + \eta_4(x_4))$$

Donde las funciones $\eta_i(x_i)$ cumplen las características vistas previamente (principalmente, la de ser convexas). Para j necesidades, se puede proponer:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{2j-1}, x_{2j}) = (x_1 + \eta_2(x_2))(x_3 + \eta_4(x_4)....(x_{2j-1} + \eta_{2j}(x_{2j}))$$

6.2. Preferencias Leontieff

Estas preferencias se utilizan para estudiar bienes cuya complementariedad sea perfecta (sí on sí deben consumirse juntos). La función de utilidad habitual para representarlas es:

$$U(x_1, x_2) = Min[\alpha x_1, \beta x_2]$$

Con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Las demandas marshallianas de los bienes 1 y 2 deben cumplir que: $\alpha x_1^* = \beta x_2^*$, dado que, de lo contrario, existiría un excedente de algún bien que podría utilizarse para aumentar la utilidad.

Un ejemplo de esta complementariedad puede encontrarse en el café con el azúcar. Ninguno de los 2 se consume en soledad, si no que es necesario combinarlos en la proporción justa. Sin embargo, también en este caso es válido preguntarse si no existen diferentes opciones para el azúcar (marcas de distinta calidad), y el café. La respuesta es que existen, pero ese escenario se puede modelar con la estructura propuesta aquí. Por ejemplo, podemos considerar la función de utilidad:

$$U(x_1, x_2, x_3) = Min[x_1, x_2 + x_3^2]$$

A partir de ella se podrá estudiar cómo la disyuntiva de calidad puede considerarse en un contexto de bienes complementarios. Para ello deberá entenderse, en primer lugar, que en el problema de maximización de utilidad asociado las cantidades consumidas de los bienes 2 y 3, no pueden ser ambas positivas en el óptimo, como se resume en el siguiente teorema (demostrado en el apéndice):

Teorema **3 (No existencia de solución interior en preferencias Leontieff)** *Si las preferencias de un agente pueden ser representadas por la función de utilidad:*

$$U(x_1, x_2, x_3) = Min[x_1, x_2 + x_3^2]$$

, entonces en el óptimo del problema de maximización de utilidad las cantidades de los bienes 2 y 3 no pueden ser ambas positivas.

Debemos notar que el bien 1 se consumirá positivamente, y que la verdadera elección será entre los bienes 2 y 3. En caso de elegir el bien 2, la utilidad será igual a $\frac{m}{p_1 + p_2}$ (un resultado conocido), mientras que, en el otro escenario, la condición $x_1 = x_3^2$ lleva a:

$$p_1 x_3^2 + p_3 x_3 = m$$

Esta ecuación cuadrática tiene como solución a la demanda marshalliana del bien 3:

$$x_3^* = \frac{-p_3 + \sqrt{p_3^2 + 4p_1 m}}{2p_1}$$

Que permite obtener la demanda del bien 1 y la utilidad indirecta (elevando al cuadrado) si la esquina óptima es la que corresponde al bien 3:

$$x_1^* = \frac{2p_3^2 + 4p_1 m - 2p_3\sqrt{p_3^2 + 4p_1 m}}{4p_1^2}$$

O bien:

$$x_1^* = \frac{m}{p_1} + \frac{p_3^2}{2p_1^2} - \frac{p_3\sqrt{p_3^2 + 4p_1 m}}{2p_1^2}$$

Estas expresiones no permiten, inicialmente, percibir para qué niveles de ingreso es óptima una u otra esquina, sin embargo, los resultados pueden resumirse en el siguiente teorema (véase el apéndice para la demostración):

Teorema **4 (Existencia de m^* en prerefencias Leontieff)** *Si las preferencias de un agente pueden ser representadas por la función de utilidad:*

$$U(x_1, x_2, x_3) = Min[x_1, x_2 + x_3^2]$$

Entonces existe un nivel de ingreso $m^* = \frac{p_3^2}{p_2^2}(p_1 + p_2)$ *para el cual, en el óptimo, si* $m > m^*$ *se consumen los bienes 1 y 3, si* $m < m^*$ *se consumen los bienes 1 y 2, y si* $m = m^*$ *el agente se encuentra indiferente entre las 2 esquinas.*

Así, se pueden derivar las mismas interpretaciones que para el caso Cobb-Douglas.

7. Demanda agregada y distribución del ingreso

En esta sección se analizará la estructura de la demanda agregada de los bienes 1 y 2, en particular respecto a cómo son afectadas por la distribución del ingreso.

Diversos autores han intentado aislar condiciones bajo las cuales la demanda agregada de un bien (como suma de las demandas individuales de los consumidores), no depende de la distribución del ingreso, sino de su nivel agregado. Distintos tipos de preferencias pueden llevar a ese resultado, como por ejemplo se muestra en Gorman (1959), y en esos casos el análisis del comportamiento de la demanda resulta notablemente simplificado.

En nuestro caso de análisis, se mostrará que no solo la demanda agregada depende de la distribución del ingreso (y no solo del nivel), sino que además esto tiene implicancias intuitivas respecto al comportamiento de los agentes acerca de su elección sobre si adquirir un bien o no.

Si bien para las preferencias analizadas se puede hallar la demanda agregada de cualquiera de los bienes de manera general, para entender las ideas principales se desarrollará un ejemplo simple:

Sean dos consumidores, A y B, cuyas preferencias sobre los bienes 1 y 2 se representan por las funciones de utilidad:

$$U_A(x_1^A; x_2^A) = x_1^A + {x_2^A}^2$$

$$U_B(x_1^B; x_2^B) = x_1^B + {x_2^B}^2$$

Ahora nos enfocaremos en la demanda agregada del bien 2. A tal fin, consideraremos, de manera alternativa, dos escenarios: En el primero de ellos el ingreso ambos agentes será, respectivamente, $m_A = 100$ y $m_B = 121$, mientras que en el segundo tendremos $m_A = 25$ y $m_B = 196$. En ambos casos se asumirá $p_1 = 1$.

La demanda del bien 2 para el agente i, puede expresarse como:

$$x_2^i(p_1, p_2, m_i) = \begin{cases} 0 & si \quad m_i \leq \dfrac{p_2^2}{p_1} \\ \dfrac{m_i}{p_2} & si \quad m_i \geq \dfrac{p_2^2}{p_1} \end{cases}$$

Ahora, para obtener las curvas de demanda individual en el primer caso, nos enfocaremos en la relación de la cantidad demandada respecto al precio del bien 2, con lo que resulta, para cada agente:

$$x_2^A(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 10 \\ \dfrac{100}{p_2} & si \quad p_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_2^B(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 11 \\ \dfrac{121}{p_2} & si \quad p_2 \leq 11 \end{cases}$$

Entonces, la curva de demanda agregada para el bien 2 resulta:

$$x_2(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 11 \\ \dfrac{121}{p_2} & si \quad 10 \leq p_2 \leq 11 \\ \dfrac{221}{p_2} & si \quad p_2 \leq 10 \end{cases}$$

Consideremos ahora una redistribución del ingreso que nos lleve a un escenario menos equitativo. Asumamos que $m_A = 25$ y $m_B = 196$. En este caso, las demandas individuales y agregadas para el bien 2 serán:

$$x_2^A(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 5 \\ \dfrac{25}{p_2} & si \quad p_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_2^B(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 14 \\ \dfrac{196}{p_2} & si \quad p_2 \leq 14 \end{cases}$$

$$x_2(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 14 \\ \\ \dfrac{196}{p_2} & si \quad 5 \leq p_2 \leq 14 \\ \\ \dfrac{221}{p_2} & si \quad p_2 \leq 5 \end{cases}$$

Puede notarse que la demanda agregada es sensible a cambios en la distribución del ingreso, aun si el ingreso agregado se mantiene al mismo nivel. Cuando la distribución es equitativa, disminuye el precio máximo que se puede cobrar para vender alguna cantidad positiva, pero también se incrementa el que se puede cobrar para que ambos consumidores adquieran el bien. Esto sucede porque el bien 2 es aquel que responde positivamente a cambios en el ingreso individual (es decir, que solo se consume una vez que el ingreso haya superado cierto umbral). En cualquier caso, cuando el precio es menor que 5 las demandas de ambos escenarios coinciden.

Puede mostrarse un resultado similar para la demanda agregada del bien 1.

8. Distribución del ingreso y beneficios del monopolista

En esta sección se discutirán de manera introductoria algunas de las implicancias de la estructura de la demanda agregada (es decir, su dependencia de la distribución del ingreso), sobre los beneficios del monopolista y, en última instancia, sobre su decisión óptima respecto a precios y cantidades fijados en el mercado. La pregunta relevante es si, en efecto, los beneficios del monopolio resultan alterados ante cambios en la distribución del ingreso. De ser cierta esta hipótesis, se podría concluir que una firma no solo debe tener en cuenta el nivel agregado de ingreso al tomar sus decisiones, si no que también debería atender la dinámica de su distribución, principalmente cuando esta última pueda verse afectada por la implementación de políticas, el ciclo económico, o impactada por cambios externos.

Puede mostrarse de manera sencilla, continuando con el ejemplo de la sección anterior, que los beneficios del monopolista son sensibles a cambios en la distribución del ingreso. Para ello nos enfocaremos, nuevamente, en el mercado del bien 2, con los consumidores ya analizados, pero incorporando una firma con un costo marginal (idéntico al costo medio) $c > 0$.

En primer lugar, se analizará el beneficio óptimo en el caso donde $m_A = 100$ y $m_B = 121$. Recordemos que la demanda agregada del bien 2 venía dada por:

$$x_2(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 11 \\ \dfrac{121}{p_2} & si \quad 10 \leq p_2 \leq 11 \\ \dfrac{221}{p_2} & si \quad p_2 \leq 10 \end{cases}$$

En los puntos donde la demanda es positiva y no hay discontinuidades, es necesario notar que la misma es de elasticidad unitaria. Es decir, que el ingreso total no cambia ante variaciones pequeñas de precio o cantidad. Esto tiene implicancias sobre el comportamiento del monopolista, dado que, sobre cualquiera de esos puntos, él podría reducir la producción, sin pérdida de ingresos pero obteniendo una disminución en sus costos, de manera tal que su beneficio aumentaría. Así, puede notarse que el beneficio máximo solo puede obtenerse en un punto donde la demanda no sea continua.

Bajo el argumento previo, el monopolista deberá vender 11 unidades a un precio de \$11 o 22,1 unidades a un precio de \$10. Pero la decisión óptima dependerá del costo marginal. Por ejemplo, si $c = 5$ vender 11 unidades reporta un beneficio de \$66 $(11 * 11 - 5 * 11)$, mientras vender 22,1 unidades llevaría a un beneficio de \$110,5. Así, conviene fijar un precio lo suficientemente bajo como para vender a ambos consumidores. La figura 3 muestra la demanda agregada para este primer escenario.

Ahora se analizará lo que sucede en el segundo caso, donde la distribución del ingreso es menos equitativa, con $m_A = 25$ y $m_B = 196$. En este escenario, la demanda agregada del bien 2 estaba dada por:

$$x_2(p_2) = \begin{cases} 0 & si \quad p_2 \geq 14 \\ \dfrac{196}{p_2} & si \quad 5 \leq p_2 \leq 14 \\ \dfrac{221}{p_2} & si \quad p_2 \leq 5 \end{cases}$$

De la cual se desprende que se puede obtener un ingreso de \$196 vendiendo 14 unidades a \$14 o uno de \$221 vendiendo 44,2 unidades a un precio de \$5. Si se mantiene el costo marginal $c = 5$, se observará que vender 14 unidades lleva a un beneficio de \$126 $(14*(14-5))$, mientras que vender 44,2 unidades derivaría en un beneficio de 0. Ahora solo conviene venderle a un consumidor, por lo que se modificó la decisión óptima. La figura 4 refleja (con escalas simplificadas) la demanda agregada luego del cambio en la distribución del ingreso.

También se puede concluir que, entre los dos escenarios, este monopolista elegiría aquel con una distribución menos equitativa. Sin embargo, este resultado puede llevar a concluir equivocadamente que el monopolista en el mercado del bien 2 siempre prefiere una distribución del ingreso menos equitativa. De hecho, lo observado se explica principalmente porque fueron asumidos costos altos. Si el costo positivo c tiende a cero, puede observarse que, en ambos escenarios, el ingreso sería de \$221, pero en el más equitativo esto se alcanzaría con una producción de 22,1 unidades, es decir, a un costo menor que en el escenario con una peor

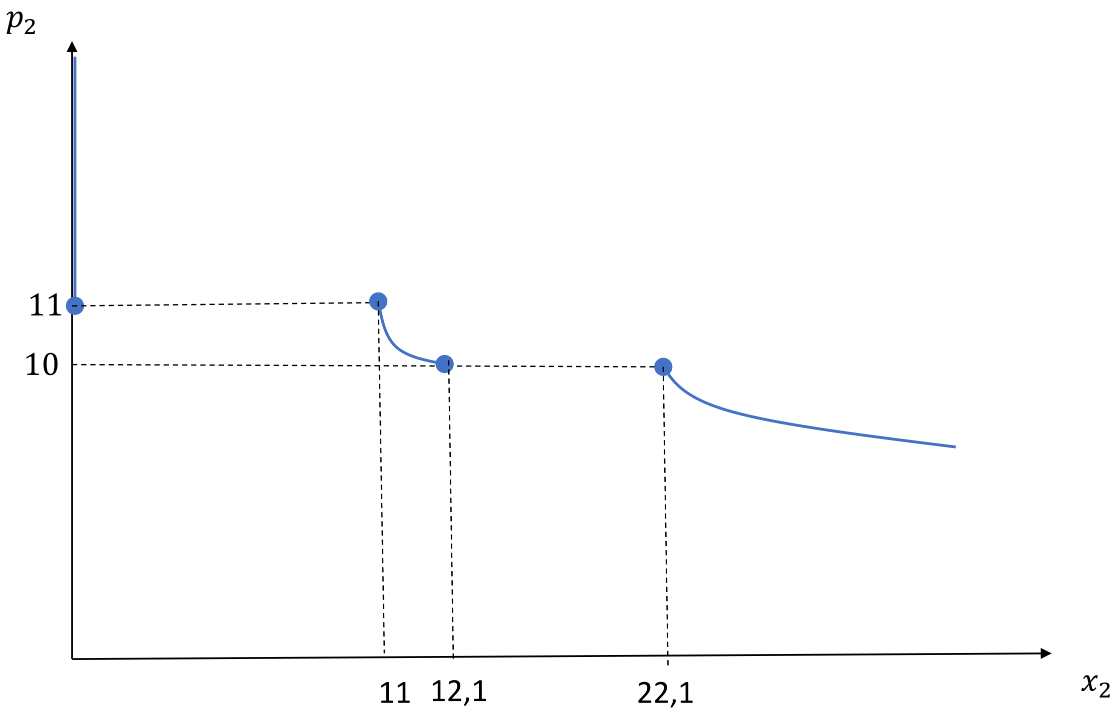

Figura 3: Demanda agregada inicial

distribución del ingreso. Así, un monopolista con costos lo suficientemente bajos preferiría el escenario más equitativo en el mercado del bien 2.

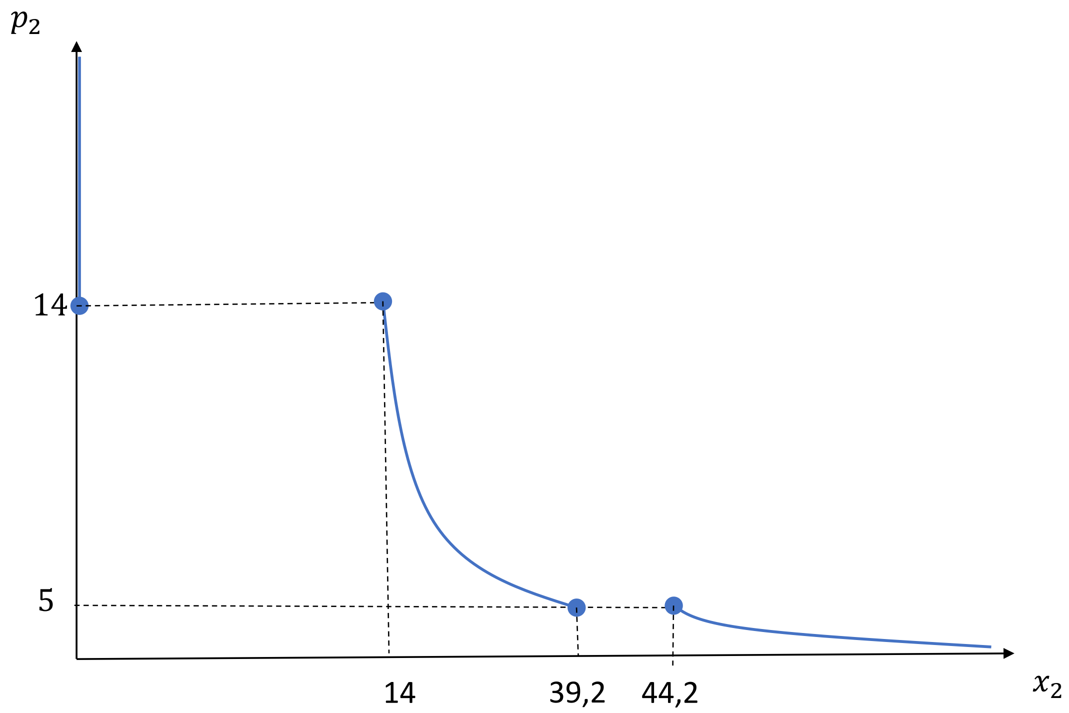

Figura 4: Demanda agregada final

9. Conclusiones

Las preferencias sobre segundas marcas pueden representarse a partir de una función de utilidad, de manera similar a lo correspondiente a otros tipos de bienes (complementarios, sustitutos, ect.). En general, ellas son bienes normales para niveles de ingresos bajos, donde el agente tiende a aumentar su consumo dado que la prioridad es satisfacer una necesidad de primer orden. Sin embargo, existe un nivel de ingreso a partir del cual el consumo se vuelve cero, representando un viraje a bienes de mayor calidad.

Este comportamiento también puede extenderse a casos con más bienes, donde la existencia de un nivel de ingreso de corte interactúa con preferencias habituales, como las Cobb - Douglas o los bienes complementarios. Se puede pensar que la disyuntiva entre primeras y segundas marcas existe para una amplia gama de casos, y que, al incorporar más de 2 bienes, pueden surgir puntos de corte para cada grupo de ellos. De este modo, es posible captar cambios en los patrones de consumo ligados a variaciones en el ingreso sin necesidad de modificar las preferencias, interpretando que estas ya podrían anticipar cómo serían esos patrones en distintos escenarios.

Finalmente, se muestra que la demanda agregada de los bienes de segunda marca depende de la distribución del ingreso, además de su nivel agregado. Así, las empresas que participan de estos mercados pueden ver alterados sus beneficios en presencia de cambios macroeconómicos que modifiquen sensiblemente la distribución, aún cuando el nivel agregado del ingreso permanezca constante. De hecho, una discusión adicional puede darse teniendo en cuenta que si existen firmas que producen ambos bienes, al resolver su problema de optimización multiproducto pueden elegir precios para los dos, e incluso en algunos casos pueden aplicar políticas de discriminación de precios, que podrían verse afectadas por cuestiones distributivas.

Aunque empíricamente, diversos estudios muestran evidencia compatible con estas ideas, un análisis específico será materia de investigaciones posteriores, principalmente en cuanto a las implicancias sobre la curva de demanda y su impacto en la conducta de las empresas.

Apéndice

A. Demostraciones para el caso de 2 bienes

A.1. Demostración del teorema 1

Para probar que la solución no es interior, se deben comprobar las condiciones de segundo orden del problema de maximización de utilidad:

$$\underset{x_1,x_2}{max}\ x_1 + \eta(x_2)$$

s.a:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Siendo

$$p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ m > 0$$

Ya que, para una solución interior, además de las condiciones de primer orden, debe darse que el determinante Hessiano Orlado sea positivo:

$$\tilde{H} = \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & \eta''(x_2) \end{vmatrix} = -p_1^2\eta''(x_2) < 0$$

Lo que, como puede observarse, no se cumple, ya que la función $\eta(x_2)$ es convexa. Nuevamente la solución será de esquina (ya que debe existir, debido a la continuidad de la función de utilidad y a la compacidad de la restricción

A.2. Demostración del teorema 2

Para probar los resultados debemos analizar 3 escenarios. Comencemos con un nivel de ingreso bajo (es decir, tendiendo a 0). Aquí puede notarse que, como $U'_{x_1} = 1$ y $U'_{x_2} = 0$, independientemente de los precios, siempre existirá un nivel de renta lo suficientemente bajo tal que sea óptimo elegir la esquina correspondiente al bien 1.

Pero si el ingreso es lo suficientemente alto, comienza a trabajar la convexidad de $\eta(x_2)$. Es decir, si el ingreso tiene a infinito, entonces será óptimo elegir la esquina correspondiente al bien 2.

Las propiedades anteriores pueden probarse fácilmente mediante argumentos de límite. La utilidad correspondiente a las esquinas 1 y 2 será, respectivamente, $\frac{m}{p_1}$ y $\eta(\frac{m}{p_2})$. Consideremos el siguiente límite:

$$\lim_{m\to 0} \frac{\frac{m}{p_1}}{\eta(\frac{m}{p_2})}$$

Aquí se puede notar que surge una indeterminación de tipo "$\frac{0}{0}$". Sin embargo, la misma puede ser salvada mediante la regla de L' Hopital, gracias a la continuidad y derivabilidad del numerador y del denominador. Resulta:

$$\lim_{m\to 0} \frac{\frac{1}{p_1}}{\eta'(\frac{m}{p_2})\frac{1}{p_2}} = \infty$$

Esto ocurre porque el denominador tiene a 0, mientras que el numerador es constante. Así, queda probado que si m es lo suficientemente bajo, será óptimo consumir el bien 1. Es decir: $\frac{m}{p_1} > \eta(\frac{m}{p_2})$. El mismo argumento puede utilizarse para probar que, ante un ingreso grande, es mejor consumir el bien 2. Consideremos:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{m}{p_1}}{\eta(\frac{m}{p_2})}$$

Que conduce nuevamente a una indeterminación, esta vez del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Para salvarla, se puede recurrir, como en el caso anterior, a la regla de L' Hopital. Tenemos:

Dado que el denominador tiende a ∞. Por lo tanto, hemos comprobado que ambas esquinas pueden ser óptimas, según si el ingreso es grande o pequeño. La siguiente pregunta es si también existe un punto de corte. Es decir, un valor del ingreso para el cual se igualen las utilidades correspondientes a ambas cestas. A tal fin, debemos considerar la diferencia:

$$\frac{m}{p_1} - \eta(\frac{m}{p_2})$$

Sobre la cual sabemos que es positiva para valores muy pequeños de m^*, y negativa para niveles muy grandes. La diferencia de funciones continuas es también una función continua, lo que nos permite aplicar el Teorema de Bolzano, que garantiza que, bajo estas condiciones, existe un valor de m^* tal que la diferencia es igual a 0.

El resultado anterior implica que, para cierto valor de $m*$, se cumple que:

$$\frac{m^*}{p_1} = \eta(\frac{m^*}{p_2})$$

B. Casos con 3 bienes

B.1. Demostración del teorema 3

A fin de probar que no se consumen al mismo tiempo los bienes 2 y 3, hay que tener en cuenta la condición de optimización $x_1^* = x_2^* + (x_3^*)^2$. Ahora se puede reformular el problema sustituyendo x_1^* en la función de utilidad y en la restricción presupuestaria, de lo que resulta:

$$\underset{x_2,x_3}{max}\ x_2 + x_3^2$$

s.a:

$$p_1(x_2 + x_3^2) + p_2 x_2 + p_3 x_3 = m$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

Siendo

$$p_1 > 0,\ p_2 > 0,\ p_3 > 0,\ m > 0$$

Si bien la función objetivo es la misma que se ha estado analizando, la restricción presupuestaria es algo más compleja. Por lo que es necesario verificar nuevamente el signo del Hessiano orlado:

$$\tilde{H} = \begin{vmatrix} 0 & p_1 + p_2 & 2p_1x_3 + p_3 \\ p_1 + p_2 & 0 & 0 \\ 2p_1x_3 + p_3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2(p_1 + p_2)^2 < 0$$

Lo que conduce, nuevamente, a concluir que no hay solución interior.

B.2. Demostración del teorema 4

Para probar la proposición se recurrirá a argumentos de límite: Consideremos, en primer lugar, el caso con m tendiendo a infinito, en base al cociente de utilidades:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\dfrac{m}{p_1} + \dfrac{p_3^2}{2p_1^2} - \dfrac{p_3\sqrt{p_3^2 + 4p_1m}}{2p_1^2}}{\dfrac{m}{p_1 + p_2}}$$

El problema es que este límite conduce a una indeterminación del tipo "$\dfrac{\infty}{\infty}$", lo que hace necesario recurrir, nuevamente, a la regla de L' Hopital, teniendo:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{p_3}{p_1\sqrt{p_3^2 + 4p_1m}}}{\dfrac{1}{p_1 + p_2}} = \frac{p_1 + p_2}{p_1} > 1$$

Resultado que permite ver que, si el ingreso es lo suficientemente alto, se prefiere la esquina correspondiente al bien 3. Ahora queda ver lo que sucede si el ingreso tiende a 0:

$$\lim_{m\to 0} \frac{\dfrac{m}{p_1} + \dfrac{p_3^2}{2p_1^2} - \dfrac{p_3\sqrt{p_3^2 + 4p_1m}}{2p_1^2}}{\dfrac{m}{p_1 + p_2}}$$

Pero esto también lleva a una indeterminación ("$\dfrac{0}{0}$") que, sin embargo, puede ser salvada:

$$\lim_{m\to 0} \frac{\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{p_3}{p_1\sqrt{p_3^2 + 4p_1m}}}{\dfrac{1}{p_1 + p_2}} = 0 < 1$$

Entonces, para un ingreso lo suficientemente bajo, lo mejor es combinar los bienes 1 y 2. Es momento de preguntarse si existe un punto de corte. Como se verá, la respuesta es afirmativa. Solo es necesario igualar las utilidades correspondientes a ambas esquinas:

$$\frac{m}{p_1+p_2}=\frac{m}{p_1}+\frac{p_3^2}{2p_1^2}-\frac{p_3\sqrt{p_3^2+4p_1m}}{2p_1^2}$$

La resolución puede ser algo tediosa, por lo que aquí se incluirán algunas expresiones intermedias:

$$(\frac{2p_1^2m}{p_1+p_2}-2p_1m-p_3^2)\frac{1}{-p_3^2}=\sqrt{p_3^2+4p_1m}$$

Elevando al cuadrado y reacomodando términos, resulta:

$$\frac{4p_1^2p_2^2m^2}{(p_1+p_2)^2p_3^2}+\frac{4p_1p_2m}{p_1+p_2}+p_3^2=p_3^2+4p_1m$$

Entonces:

$$\frac{p_1p_2^2m}{(p_1+p_2)^2p_3^2}+\frac{p_2}{p_1+p_2}=1$$

De donde es evidente la expresión del punto de corte:

$$m^*=\frac{p_3^2}{p_2^2}(p_1+p_2)$$

Referencias

[1] Becchetti, L., & Rosati, F. C. (2007). Global social preferences and the demand for socially responsible products: empirical evidence from a pilot study on fair trade consumers. *World Economy* 30(5), 807-836.

[2] Chyi, H. I., & Yang, M. J. (2009). Is online news an inferior good? Examining the economic nature of online news among users. *Journalism & Mass Communication Quarterly*, 86(3), 594-612.

[3] Garratt, R. (1997). Indivisibilities, inferior goods, and Giffen goods. *Canadian Journal of Economics*, 246-251.

[4] Gorman, W. M. (1959). Separable utility and aggregation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 469-481.

[5] Haagsma, R. (2012). Notes on some theories of Giffen behaviour. *New Insights into the Theory of Giffen Goods*, (pp. 5-19). Springer, Berlin, Heidelberg.

[6] Hicks, J. R. (1946). Value and Capital, 2nd.

[7] Khan, J. A., & Mahumud, R. A. (2015). Is healthcare a 'Necessity'or 'Luxury'? an empirical evidence from public and private sector analyses of South-East Asian countries?. *Health economics review*, 5(1), 3.

[8] Liebhafsky, H. H. (1969). New thoughts about inferior goods. *The American Economic Review*, 59(5), 931-934.

[9] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., & Green, J. R. (1995).
Microeconomic theory (Vol. 1). New York: Oxford university press.

[10] Varian Hal, R. (1999).Microeconomía Intermedia, un enfoque actual.
Antoni Bosch.