Modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad

Alicia Ester Pedrosa*

31 de agosto de 2022

Resumen

En este trabajo mostramos en un modelo de asignación generalizado que las pre-asignaciones estables siempre existen, y se pueden calcular utilizando una adaptación del algoritmo de *Tan (1991)*. También probamos la existencia y una categorización de pre-asignaciones $q-$estables cuando el modelo tiene restricción de capacidad (cuota q).

1. Introducción

Gale y Shapley (1962) introdujeron el *modelo de asignación generalizado* bajo la denominación de *"problema de mercado de compañeros de cuarto"* constituido por un conjunto de agentes y un conjunto de listas de preferencias de cada agente. Una asignación es *estable*, si a todos los agentes se les hace corresponder un compañero aceptable y no hay un par de agentes, que se prefieran mutuamente a sus respectivas parejas, es decir que *bloqueen* la asignación. Mostraron con un ejemplo que existen modelos en los que no se puede encontrar una asignación estable. *Irving* (1985) construyó el primer algoritmo polinomial que permitió determinar las asignaciones estables para estos modelos, si es que existen, o informar que no existen[1].

El no poder asegurar la existencia de asignaciones estables motivó a introducir estructuras diferentes a la de asignación. *Tan* (1991) mostró que se podían definir las llamadas particiones estables y probó que siempre existe una solución donde todos los agentes están conformes. *Tan y Hsueh* (1993) diseñaron un nuevo algoritmo que encuentra una partición estable y determina, si existe, una asignación estable. *Chung* (2003) extendió el resultado de *Tan*, al considerar preferencias débiles para los agentes. Identificó la condición que no existan *anillos (partes) impares* como suficiente para la existencia de asignación estable.

*Departamento de Matemática. Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes. Universidad Nacional de San Juan. Ignacio de la Roza 230 Oeste, CP 5400, San Juan, Argentina. email: pedrosaaliciaester@gmail.com

[1]Ver también el libro de *Gusfield e Irving* (1990).

En este trabajo introducimos las *pre-asignaciones ordenadas* como una función que a cada agente le asigna un par de agentes. En algunos casos hacemos corresponder un único agente por tiempo completo (una pareja), o la mitad del tiempo un agente y la otra mitad el agente a sí mismo (un compañero de medio tiempo), o dos compañeros distintos cada uno por medio tiempo o asignamos un agente sólo a sí mismo (agente solo).

Generalizamos la noción de estabilidad, es decir pre-asignaciones ordenadas donde los agentes no manifiestan disconformidad sobre la correspondencia establecida. Definimos los conceptos de *ciclo y cadena* de una pre-asignación ordenada, como conjuntos ordenados de agentes con ciertas características de asignación. Demostramos que toda pre-asignación estable particiona el conjunto de agentes en ciclos de longitud uno, dos o impar mayor a tres. Probamos también que siempre es posible encontrar pre-asignaciones estables[2] y realizamos una adaptación del algoritmo *Tan* (1991) para determinarlas.

Con la intención de establecer cuando una pre-asignación estable puede ser preferida a otra, introducimos la noción de cardinalidad de una pre-asignación ordenada, la que se determina en función al número de espacios (habitaciones, canchas, mesas de juego, etc.) que se le asigna a cada una. El número de espacios asignados a una pre-asignación ordenada surge de la suma de los otorgados a cada conjunto. Demostramos que, dos pre-asignaciones estables de un mismo modelo, tienen la misma cardinalidad.

Extendemos al modelo de asignación generalizado el concepto de cuota estudiado por *Femenía, Marí, Neme y Oviedo* (2006) para un modelo de asignación uno a uno con restricción de capacidad. Suponemos ahora que la empresa que ofrece los espacios (habitaciones, canchas, etc.), que serán distribuidos entre los agentes, necesita establecer un número máximo, que puede no cubrir todas las necesidades de los agentes. A este número máximo lo denominamos *cuota*.

Estudiamos entonces la existencia de pre-asignaciones estables en un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad q, que denominamos *pre-asignaciones* $q-$*estables*. En general, bajo la restricción de suponer que la empresa establece una cuota y una preferencia sobre las pre-asignaciones estables, pueden no existir pre-asignaciones q-estables. Restringiendo las preferencias de la empresa sobre los agentes (*preferencias responsive*), esta existencia está garantizada. Finalmente caracterizamos al conjunto de las pre-asignaciones $q-$estables con cantidad de espacios asignados *igual* a q, y con número de espacios *menor* a q, demostrando que estos resultados no dependen de las preferencias responsive particulares de la empresa.

En la primera parte de este trabajo describimos el modelo de asignación generalizado y definimos los conceptos de pre-asignación ordenada y pre-asignación estable. Mostramos que siempre existe una pre-asignación estable y presentamos una adaptación del algoritmo de *Tan*(1991) para determinar las asignaciones estables, si es que existen, y encontrar todas las pre-asignaciones estables. En la segunda parte definimos la noción de cardinalidad de una pre-asignación ordenada y pre-asignación estable y demostramos que, para un mismo modelo, estos conceptos son independientes de las pre-asignaciones halladas. Probamos además la relación de cardinalidad entre pre-asignaciones de modelos que difieren en un número finito de

[2] Para ello establecemos la equivalencia entre las estructuras de pre-asignación estable y partición estable definida por *Tan* (1991).

agentes. En la tercera parte, describimos el modelo generalizado con restricción de capacidad y el conjunto de pre-asignaciones q-estables. Mostramos que, en general, el conjunto de pre-asignaciones q-estables puede ser vacío. Definimos el concepto de *extensión responsive* de la empresa y demostramos que esta restricción es suficiente para obtener la existencia de pre-asignaciones $q-$estables. Finalmente damos una caracterización completa de dicho conjunto. Como último resultado demostramos que dos extensiones responsive de la empresa no proporcionan un conjunto de pre-asignaciones $q-$estables diferente.

2. Descripción del modelo

Consideremos un conjunto finito de agentes A, de cardinalidad n. Cada agente $x \in A$ tiene *preferencias estrictas*[3] sobre los agentes de A, en particular sobre el mismo x. Escribimos $y \succ_x z$ para indicar que x prefiere estrictamente a y antes que a z. Definimos el orden débil[4] $y \succeq_x z$ si y sólo si $y \succ_x z$ o $y = z$. En este último caso decimos que x prefiere débilmente a y antes que a z o que prefiere a y tanto como a z. Un agente y es aceptable para x si verifica que $y \succeq_x x$. Si además vale que $x \succeq_y y$ decimos que x e y son *mutuamente aceptables.* Todo agente es aceptable para sí mismo.

Al conjunto de preferencias de todos los agentes de A lo denominamos *perfil de preferencias* y lo notamos $\succ_A$.

$$\succ_A = \{\succeq_x : x \in A\}$$

Un modelo de asignación generalizado es un par $(A, \succ_A)$, donde A es el conjunto de agentes y $\succ_A$ el perfil de preferencias de los agentes de A. Nuestro objetivo inicial es distribuir los n agentes de A en pares disjuntos.

Definición 1 *Dado $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado. Una* **asignación** *μ es una correspondencia uno a uno de A sobre A tal que: (i) $\mu(x) \in A$ para todo $x \in A$, (ii) $\mu(x) = y$ si y sólo si $\mu(y) = x$, para todo $\{x, y\} \subseteq A$.*

Es decir que cada agente $x \in A$ siempre tiene asignado, por intermedio de μ, un agente de A. Además si un agente x es asignado a y, entonces y también es asignado a x. Decimos en ese caso que x e y son compañeros o que constituyen una pareja. Si x es asignado a x, decimos que x es un agente solo o que está asignado a sí mismo. Escribimos $\mu = \{(x, y) : \mu(x) = y\}$.

Ningún agente puede ser obligado a formar pareja con un agente para él inaceptable, en caso contrario decimos que la asignación es bloqueada por un agente.

Dado un modelo $(A, \succ_A)$ de asignación generalizado, si el conjunto A puede ser particionado en dos subconjuntos no vacíos tales que los agentes de cada uno de ellos sólo consideran aceptables a los agentes del otro conjunto, entonces este modelo puede ser considerado una generalización del modelo de asignación uno a uno introducido por Gale y Shapley (1962).

Es decir, si el conjunto de agentes A puede ser particionado en A_1 y A_2, ambos no vacíos, tales que para cualquier $\{x, y\} \subseteq A_1, x \neq y$ (respectivamente A_2) verificamos que x no es

[3]Entendiendo por preferencia estricta a una relación binaria completa, antisimétrica y transitiva.
[4]Entendiendo por orden débil a un orden completo, reflexivo, antisimétrico y transitivo.

aceptable para y e y no es aceptable para x, $(x \succ_x y\ ,\ \ y \succ_y x)$, entonces $(A, \succ_A)$ es un modelo de asignación uno a uno.

Gale y Shapley (1962) demostraron que siempre existe una asignación estable para el modelo de asignación uno a uno, pero mostraron con un ejemplo que no ocurre así en el modelo de asignación generalizado.

Como no podemos garantizar la existencia de asignaciones estables en un modelo de asignación generalizado, estudiamos asignaciones más débiles que denominamos *pre-asignaciones estables.*

Para ello imaginemos que los agentes son jugadores de tenis a los que se desea asignar durante un cierto tiempo una pareja de juego. Si suponemos que las parejas pueden asignarse la mitad del tiempo destinado a cada juego, un jugador puede jugar tiempo completo con un mismo compañero; o jugar medio tiempo con un compañero y el otro medio tiempo con otro; o jugar medio tiempo con un compañero y quedarse sin jugar el otro medio tiempo o simplemente no jugar.

Una pre-asignación ordenada es una función que a cada agente le asigna un par de agentes, con ciertas características, de acuerdo a su lista de preferencia. En algunos casos hacemos corresponder un único agente por tiempo completo, es decir establecemos una pareja. En otros casos hacemos corresponder la mitad del tiempo un agente y la otra mitad el agente a sí mismo, es decir asignamos un compañero de medio tiempo. También podemos asignar dos compañeros distintos cada uno por medio tiempo y por último podemos asignar un agente sólo a sí mismo, es decir dejarlo solo.

Formalmente:

Definición 2 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y las funciones $\mu_1, \mu_2 : A \to A$. Una* **pre-asignación ordenada** *es una función $\mu : A \to A \times A$ tal que para todo $x \in A$ se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x))$,

(ii) $\mu_2(x) \succeq_x \mu_1(x)$,

(iii) si $y \in \{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ *entonces* $x \in \{\mu_1(y), \mu_2(y)\}$,

(iv) si $\mu(x) = (y, y)$ *entonces* $\mu(y) = (x, x)$.

Denotamos con $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ al conjunto de pre-asignaciones ordenadas de este modelo. Es decir, $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \{\mu : \mu$ es una pre-asignación ordenada en el modelo $(A, \succ_A)\}$.

Es claro que si $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x)) = (q, r),\ q \neq r$, entonces $q, r \in \{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ y por (iii) $x \in \{\mu_1(q), \mu_2(q), \mu_1(r), \mu_2(r)\}$.

Además si $\mu(x) = (x, w)$, $w \in \{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$ entonces por (iii) $x \in \{\mu_1(w), \mu_2(w)\}$.

Dadas dos funciones μ_1 y μ_2 de A en A tales que para todo $x \in A$, $\mu_2(x) \succeq_x \mu_1(x)$ siempre podemos construir una pre-asignación ordenada $\mu : A \to A \times A$ dada por $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x))$.

Notemos además que si para todo $x \in A$ se verifica que $\mu_1(x) = \mu_2(x)$, entonces la pre-asignación ordenada μ define una asignación μ' de A en A, dada por $\mu'(x) = \mu_1(x)$ para todo

$x \in A$. Recíprocamente toda asignación μ'' de A en A induce una pre-asignación ordenada μ^* de A en $A \times A$, tal que $\mu^*(x) = (\mu''(x), \mu''(x))$.

Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y μ una pre-asignación ordenada, entonces:

- Si $\mu(x) = (a, b),\ \ a \neq b$, decimos que x *tiene dos compañeros de medio tiempo* a y b, tales que $b \succ_x a$.
- Si $\mu(x) = (x, a),\ \ x \neq a$, decimos que x *tiene sólo un compañero de medio tiempo* a.
- Si $\mu(x) = (x, x)$, decimos que x *no tiene compañero* o *que está asignado a sí mismo* o que *está solo*.
- Si $\mu(x) = (y, y),\ \ x \neq y$, decimos que x *tiene como compañero a* y o que $\{x, y\}$ *forman una pareja*.
- La asignación de los agentes x, y, z por medio de μ la denotamos por $(x, (y, z))$, con $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x)) = (y, z)$.

La noción de compañeros de medio tiempo nos permite introducir los conceptos de ciclo y cadena en una pre-asignación ordenada.

Definición 3 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y μ una pre-asignación ordenada. El conjunto ordenado $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, con $a_i \in A, 1 \leq i \leq r,\ \ r \leq |A|$, denotado por $B_\mu = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$, es un* **ciclo de longitud r** *si verifica:*

i) si $r \geq 3$, $\quad a_2 \succ_{a_1} a_r \succ_{a_1} a_1$; $a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1} \succ_{a_i} a_i$, *para* $1 < i < r$; $a_1 \succ_{a_r} a_{r-1} \succ_{a_r} a_r$; *y*

$$\mu(x) = \begin{cases} (a_r, a_2) & \textit{para} \quad x = a_1 \\ (a_{i-1}, a_{i+1}) & \textit{para} \quad x = a_i,\ 1 < i < r \\ (a_{r-1}, a_1) & \textit{para} \quad x = a_r \end{cases}$$

ii) si $r = 2$, $\quad a_2 \succ_{a_1} a_1$; $a_1 \succ_{a_2} a_2$ *y*

$$\mu(x) = \begin{cases} (a_2, a_2) & \textit{para} \quad x = a_1 \\ (a_1, a_1) & \textit{para} \quad x = a_2 \end{cases}$$

iii) si $r = 1$, $\quad \mu(x) = (x, x)$.

La longitud de un ciclo es el número de agentes que lo define. $B_\mu = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ es un ciclo de longitud r. Si r es impar decimos que el ciclo es impar.

Observemos que en un ciclo de longitud mayor o igual a 3, los agentes están asignados con los que están a su izquierda y a su derecha, excepto el primero que está asignado al último y al segundo; y el último al que se le hace corresponder el penúltimo y el primero. Es decir es un subconjunto ordenado de agentes $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, tales que $a_2 \succ_{a_1} a_r \succ_{a_1} a_1$; $a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1} \succ_{a_i} a_i$, para $1 < i < r$; $a_1 \succ_{a_r} a_{r-1} \succ_{a_r} a_r$, asignados como se indica anteriormente.

Un agente solo y una pareja de agentes definen ciclos de longitud 1 y 2 respectivamente.

Por abuso del lenguaje, usamos $B_\mu = (a_1, \cdots, a_r)$ para representar al ciclo propiamente dicho y $B_\mu = \{a_1, \cdots, a_r\}$ para referirnos a los elementos del ciclo y escribimos, por ejemplo, $B_\mu \subseteq A$.

Veamos en detalle algunas propiedades de estos conjuntos de agentes.

Proposición 1 *Dado un modelo $(A, \succ_A)$, una pre-asignación ordenada μ y un conjunto ordenado $B_\mu = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ de r elementos de A. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) B_μ *es un ciclo.*

ii) $B_\mu = \left(\mu_2^{r-i+1}(a_i), \cdots, \mu_2^{r-1}(a_i), a_i, \mu_2(a_i), \cdots, \mu_2^{r-i}(a_i)\right), a_i \in B_\mu.$

iii) $B_\mu = \left(\mu_1^{i-1}(a_i), \cdots, \mu_1(a_i), a_i, \mu_1^{r-1}(a_i), \cdots, \mu_1^{i}(a_i)\right), a_i \in B_\mu.$

iv) $\mu_1(a) = b$ *si y sólo si* $\mu_2(b) = a$*, para todo* $a, b \in B_\mu$*.*

Proposición 2 *Sea μ una pre-asignación ordenada en el modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$. Sean $B_\mu = (a_1, a_2, \cdots, a_w)$ y $C_\mu = (b_1, b_2, \cdots, b_s)$ dos ciclos de longitud w y s. Si $B_\mu \cap C_\mu \neq \emptyset$ entonces $B_\mu = C_\mu$.*

Lo que llamamos cadena, es una noción similar a la de ciclo con una variante en la asignación de los agentes de los extremos.

Formalmente:

Definición 4 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y μ una pre-asignación ordenada. El conjunto ordenado $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, con $a_i \in A, 1 \leq i \leq r$, denotado por $\overline{B}_\mu =< a_1, a_2, \cdots, a_r >$, es una* **cadena de longitud r***, si verifica*

i) $r \geq 2$,

ii) $a_2 \succ_{a_1} a_1$; $a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1} \succ_{a_i} a_i$, *para* $1 < i < r$; $a_{r-1} \succ_{a_r} a_r$;

iii) $\mu(x) = \begin{cases} (a_1, a_2) & si \quad x = a_1 \\ (a_{i-1}, a_{i+1}) & si \quad x = a_i, 1 < i < r \\ (a_r, a_{r-1}) & si \quad x = a_r \end{cases}$

Una cadena es un subconjunto ordenado de agentes $a_1, a_2, \cdots, a_r$, tales que $a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1}$, para $1 < i < r$; $a_2 \succ_{a_1} a_1$ y $a_{r-1} \succ_{a_r} a_r$, y los agentes están asignados con los que están a su izquierda y a su derecha, salvo los agentes de los extremos que están asignados a sí mismos y al agente siguiente en el caso de a_1 y al anterior en el caso de a_r.

Si μ es una pre-asignación ordenada, $< a_1, \cdots, a_r >$ es una cadena si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:

i) $\mu_1(a_j) = a_{j-1}$ para todo $1 < j < r$,

ii) $\mu_2(a_j) = a_{j+1}$ para todo $1 \leq j < r$,

iii) $\mu_1(a_1) = a_1$,

iv) $\mu_1(a_r) = a_r$ y

v) $\mu_2(a_r) = a_{r-1}$.

Nuevamente, por abuso del lenguaje, usamos $\overline{B}_\mu =< a_1, \cdots, a_r >$ para representar a la cadena propiamente dicha y $\overline{B}_\mu = \{a_1, \cdots, a_r\}$ para referirnos a los elementos de la cadena y escribimos, por ejemplo, $\overline{B}_\mu \subseteq A$.

Dado un modelo $(A, \succ_A)$ probemos que existe una partición de A tal que cada elemento de la partición es un ciclo o una cadena de una pre-asignación ordenada.

Para analizar algunas de las propiedades de las pre-asignaciones ordenadas y referirnos a las familias que contienen a ciertos subconjuntos de A, necesitamos introducir las siguientes notaciones.

$$P_1(\mu) = \{\{a\} \subseteq A : \mu(a) = (a, a)\}$$

la familia de los conjuntos unitarios determinados por los agentes que están asignados a sí mismos,

$$P_2(\mu) = \{\{a, b\} \subseteq A : a \neq b \text{ y } \mu(a) = (b, b)\}$$

la familia de los conjuntos de cardinalidad 2 constituidos por las parejas de agentes asignadas entre sí,

$$\mathcal{B} = \{B_\mu \subseteq A \ : \ B_\mu \text{ es un ciclo de longitud mayor o igual a } 3\}$$

la familia de ciclos de longitud mayor o igual a 3,

$$P_3(\mu) = \bigcup_{B_\mu \in \mathcal{B}} B_\mu$$

la unión de todos los ciclos de la familia $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{C} = \{\overline{B}_\mu \subseteq A \ : \ \overline{B}_\mu \text{ es una cadena de longitud mayor o igual a 3 }\}$$

la familia de cadenas,

$$P_4(\mu) = \bigcup_{\overline{B}_\mu \in \mathcal{C}} \overline{B}_\mu$$

la unión de todas las cadenas de la familia $\mathcal{C}$.

Ejemplo: Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado con $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y el perfil de preferencias: $c \succ_a b \succ_a e \succ_a d \succ_a f$; $e \succ_b c \succ_b a \succ_b f$; $d \succ_c b \succ_b a \succ_c f$; $e \succ_d a \succ_d c \succ_d f$; $a \succ_e d \succ_e b \succ_e f$; $a \succ_f b \succ_f c \succ_f d \succ_f e \succ_f g$; $h \succ_g f$; $g \succ_h h$. y $\mu^1 = \{(a, (a, b)), (b, (a, c)), (c, (c, b)), (d, (f, e)), (e, (d, f)), (f, (e, d)), (g, (h, h)), (h, (g, g))\}$; $\mu^2 = \{(a, (e, b)), (b, (a, c)), (c, (b, d)), (d, (c, e)), (e, (d, a)), (f, (f, f)), (g, (h, h)), (h, (g, g))\}$ pre-asignaciones ordenadas.

En μ^1 el agente g está asignado todo el tiempo al agente h y h con g, luego $\{g, h\}$ define una pareja. Por lo tanto $\{g, h\} \in P_2(\mu^1)$.

El agente d tiene asignados dos compañeros de medio tiempo e y f, con $e \succ_d f$. Como además e tiene asignados a d y f, con $d \succ_e f$, y f tiene asignados a e y d, con $d \succ_f e$, entonces (d, e, f) es un ciclo de longitud 3. Luego $\{d, e, f\} \subseteq \mathcal{B}$ y por lo tanto $\{d, e, f\} \in P_3(\mu)$.

Los agentes a, b, c verifican que: a tiene asignados a a y b, con $b \succ_a a$; b tiene asignados a a y c, con $c \succ_b a$; y c tiene asignados a b y c, con $c \succ_c b$. Luego μ^1 presenta la cadena $< a, b, c >$ de longitud 3. Por lo tanto $\{a, b, c\} \subseteq \mathcal{C}$, es decir que $\{a, b, c\} \in P_4(\mu)$.

Para simplificar la notación de una pre-asignación ordenada y cuando no haya lugar a dudas, podemos escribir:

$$\mu^1 \equiv \{< a, b, c >, (d, e, f), \{g, h\}\}.$$

explicitando los agentes solos, las parejas, los ciclos y las cadenas que se forman al definir la pre-asignación ordenada μ^1.

$$\mu^2 \equiv \{(a, b, c, d, e), \{g, h\}, \{f\}\}.$$

3. Existencia de pre-asignación estable

Nos interesa estudiar las pre-asignaciones ordenadas donde los agentes no manifiestan disconformidad sobre la correspondencia establecida. Para ello definimos la noción de bloqueo y de pre-asignaciones individualmente racionales y estables.

Definición 5 *Sea μ una pre-asignación ordenada en el modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$, μ está* **bloqueada por un agente** *$x \in A$ si*

$$x \succ_x \mu_1(x).$$

Observemos que si $x \succ_x \mu_2(x)$, tenemos que $x \succ_x \mu_1(x)$, esta es una consecuencia inmediata ya que $\mu_2(x) \succ_x \mu_1(x)$ por definición de μ.

Definición 6 *Una pre-asignación ordenada μ es* **individualmente racional** *si no está bloqueada por ningún agente.*

Si dos agentes que no están asignados entre sí se prefieren mutuamente a sus peores asignaciones por la pre-asignación ordenada, decimos que la bloquean.

Formalmente:

Definición 7 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado. Un par de agentes $\{x, y\} \subseteq A$* **bloquean una pre-asignación ordenada** *μ si*

$$y \succ_x \mu_1(x) \;\; y \;\; x \succ_y \mu_1(y).$$

Esto es x prefiere y a su peor asignación $\mu_1(x)$ e y prefiere x a su peor asignación $\mu_1(y)$.

Observemos que, como $\mu_2(x) \succeq_x \mu_1(x)$, si $y \succ_x \mu_2(x)$ entonces $y \succ_x \mu_1(x)$. Luego, si además $x \succ_y \mu_1(y)$ se verifica que $\{x, y\}$ bloquea a μ.

Definición 8 *Una pre-asignación individualmente racional μ es una* **pre-asignación estable** *si no es bloqueada por un par de agentes.*

Analicemos estas definiciones en el ejemplo anterior: Podemos estudiar la estabilidad de μ^2 observando, por ejemplo, que si bien f prefiere al agente a a estar solo, a está asignado medio tiempo a su mejor opción b y medio tiempo con e, $b \succ_a e \succ_a f$; c prefiere d antes todo el tiempo, pero d prefiere estar medio tiempo con c y e antes que todo el tiempo con c. Observamos que si se asignan a los agentes c, d, e, a, b por medio tiempo con dos de sus mejores opciones, ellos constituyen un ciclo de longitud 5, donde todos los agentes están satisfechos con su asignación. Luego μ^2 es estable.

En cambio la pre-asignación ordenada μ^1 no es estable, ya que presenta la cadena $< a, b, c >$ donde, por ejemplo $\{a, e\}$ es un par bloqueante.

Proposición 3 *Si μ es una pre-asignación estable en un modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$, entonces $P_4(\mu) = \emptyset$.*

La proposición anterior establece que toda pre-asignación estable no contiene cadenas. Considerando además que los agentes solos y las parejas son ciclos de longitud uno y dos, respectivamente, podemos concluir que toda pre-asignación estable sólo contiene ciclos.

Formalmente:

Corolario 1 *Si μ es una pre-asignación estable en un modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$, entonces para todo $a \in A$ existe un ciclo $B_\mu \subseteq A$ tal que $a \in B_\mu$.*

La proposición 1, ítem (iv), establece que todos los agentes a, b de un ciclo verifican la propiedad $\mu_1(a) = b$ si y sólo si $\mu_2(b) = a$. El corolario 1 muestra que todos los agentes asignados por una pre-asignación estable pertenecen a un ciclo. Luego es claro que las propiedades enunciadas en la proposición 1 son verificadas por todos los agentes de A.

Dado que una pre-asignación estable μ está caracterizada por los ciclos B_μ^i que pertenecen a $P_1(\mu) \cup P_2(\mu) \cup P_3(\mu)$, por abuso del lenguaje indicamos también con μ al conjunto:

$$\mu \equiv \{B_\mu^i \subseteq A : B_\mu^i \text{ es un ciclo, } i \leq |A|\}.$$

Proposición 4 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y μ una pre-asignación estable. Si los k subconjuntos $B_\mu^i \subseteq A, 1 \leq i \leq k$ son los ciclos definidos por μ entonces $\{B_\mu^i\}_{1 \leq i \leq k}$ es una partición de A.*

En algunos modelos de asignación generalizados pueden no existir asignaciones estables, vamos a probar que siempre es posible encontrar pre-asignaciones estables. Para ello establecemos la equivalencia entre las estructuras de pre-asignación estable y partición estable definida por *Tan* (1991).

(Tan, 1991) Sea un modelo de asignación generalizado[5] $(A, \succ_A)$, y sea $\Pi(B)$ un conjunto ordenado de agentes de A. $\Pi(B) = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subseteq A$, con $|\Pi(B)| = k$, es una **permutación semi partida** (spp) de longitud k si verifica una de las condiciones siguientes:

i) $k \geq 3$ y $a_2 \succ_{a_1} a_k,\ a_3 \succ_{a_2} a_1,\ \cdots,\ a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1},\ \cdots,\ a_k \succ_{a_{k-1}} a_{k-2},\ a_1 \succ_{a_k} a_{k-1}$.

ii) $k = 2$ y $a_2 \succ_{a_1} a_1,\ a_1 \succ_{a_2} a_2$.

iii) $k = 1$.

Sea un modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$, una partición $\Pi = \{B^1, B^2, \cdots, B^k\}$ con $B^i = \{a_1^i, a_2^i, \cdots, a_{r_i}^i\}$ es una **partición estable** del conjunto A, si para todo $i = 1, \cdots, k$, B^i es spp de longitud r_i y verifica las siguientes **condiciones**:

- Si $a_m^i \succ_{a_t^i} a_{t-1}^i \succ_{a_t^i} a_t^i$ entonces $a_{m-1}^i \succ_{a_m^i} a_t^i \succ_{a_m^i} a_m^i$, para todo $1 < m \leq r_i;\ 1 < t \leq r_i$.
- Si $a_m^i \succ_{a_1^i} a_k^i \succ_{a_1^i} a_1^i$ entonces $a_{m-1}^i \succ_{a_m^i} a_1^i \succ_{a_m^i} a_m^i$.
- Si $a_1^i \succ_{a_t^i} a_{t-1}^t \succ_{a_t^i} a_t^i$ entonces $a_k^i \succ_{a_1^i} a_t^i \succ_{a_1^i} a_1^i$.

Para probar que el conjunto de pre-asignaciones estables es no vacío mostramos que, en un modelo de asignación generalizado, toda pre-asignación estable define una partición estable y toda partición estable induce una pre-asignación estable.

Para ello, dada una pre-asignación estable μ, notamos con Π_μ a la partición definida por μ y dada una partición estable Π, notamos con μ_Π a la pre-asignación estable inducida por Π. Mostramos estos conceptos en los siguientes teoremas.

Teorema 1 *Sea μ una pre-asignación estable en un modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$. Entonces Π_μ es una partición estable.*

Teorema 2 *Sea Π una partición estable en un modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$. Entonces μ_Π es una pre-asignación estable.*

Para demostrar estos teoremas consideramos el siguiente lema.

En primer lugar mostramos la equivalencia entre ciclo de una pre-asignación ordenada y spp de una partición estable.

Lema 1 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y μ una pre-asignación ordenada. El conjunto ordenado B_μ es un ciclo si y sólo si B_μ es spp.*

Con esta propiedad demostramos que en un modelo de asignación generalizado toda pre-asignación estable define una partición estable y que toda partición estable en el modelo de asignación generalizado define una pre-asignación estable.

[5] *Tan* denomina relación de preferencia a lo que en este trabajo referimos como modelo de asignación generalizado.

Observemos que si μ es una pre-asignación estable entonces, por teorema 1, Π_μ es una partición estable definida por μ. Además por teorema 2, μ_{Π_μ} es una pre-asignación estable inducida por Π_μ. Como todas las particiones estables de un mismo modelo tienen los mismos ciclos impares, las pre-asignaciones estables μ y μ_{Π_μ} pueden coincidir o diferir sólo en la forma de asignar las parejas.

Hemos demostrado (Teoremas 1 y 2 que el concepto de partición estable, introducido por *Tan* (1991), es equivalente al de pre-asignación estable. Esta equivalencia nos permite asegurar la existencia de una pre-asignación estable y generalizar muchas de las propiedades mostradas en Tan (1991).

Teorema 3 *Para cualquier modelo de asignación generalizado existe una pre-asignación estable.*

Proposición 5 *Una pre-asignación estable define una asignación estable si y sólo si A puede ser particionado en ciclos de longitud dos.*

Teniendo en cuenta que las pre-asignaciones estables particionan al conjunto de agentes en ciclos de longitud uno, dos y mayor a dos, podemos decir que una pre-asignación estable define una asignación estable si $P_1(\mu) = P_3(\mu) = \emptyset$.

Proposición 6 *Dos pre-asignaciones estables de un mismo modelo de asignación generalizado tienen exactamente los mismos ciclos impares.*

El corolario 6, establece que si μ, μ' son dos pre-asignaciones estables del modelo $(A, \succ_A)$, entonces $P_1(\mu) = P_1(\mu')$ y $P_3(\mu) = P_3(\mu')$. Además

Teorema 4 *Un modelo de asignación generalizado admite una asignación estable si y sólo si una pre-asignación estable para ese modelo no contiene ciclos impares.*

El problema de existencia de asignaciones estables en este modelo puede ser analizado utilizando una adaptación del algoritmo de *Tan* (1991). Este algoritmo consiste en un proceso de eliminación de agentes de las listas de preferencias, que permite determinar las pre-asignaciones estables y establecer con certeza si estas constituyen o no asignaciones estables.

Adaptación del algoritmo de Tan

Irving (1984) fue el primero en describir un algoritmo que determina, para cualquier modelo de asignación generalizado, si existe una asignación estable y en caso afirmativo, encontrarla. Posteriormente *Tan* (1991) modificó este algoritmo y proporcionó un mecanismo para establecer todas las particiones estables para cualquier modelo dado.

En este trabajo realizamos una adaptación del algoritmo de *Tan* para determinar las asignaciones estables, si es que existen, o en caso contrario encontrar todas las pre-asignaciones estables.

En lo que sigue y con el objeto de simplificar la notación, asumimos que para cualquier caso particular de este modelo, las personas se etiquetan $1, 2, \cdots, n$, es decir notamos al conjunto de agentes con $A = \{1, 2, \cdots, n\}$.

Siguiendo a *Tan* (1991) consideramos el **perfil de preferencia simétrico** o simplemente **perfil simétrico**[6], entendiendo por perfil simétrico a todo perfil en el que los agentes son mutuamente aceptables, es decir: si un agente m está en la lista del agente i entonces i está en la lista del agente m, pudiendo estar cada uno en distinta posición en la respectiva lista.

El perfil de preferencias del ejemplo, es simétrico.

La siguiente es una adaptación fiel del algoritmo de *Tan* (1991) a pre-asignaciones estables.

Dado un modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$ nos proponemos encontrar una asignación estable o determinar que no existe y en tal caso explicitar las pre-asignaciones estables existentes.

El algoritmo elimina sucesivamente agentes de las listas de preferencias hasta que cada agente tenga un sólo agente en su lista, o hasta que alguna lista no tenga agentes y/o se hayan deteminado ciclos de longitud impar mayor o igual a 3. En el primer caso, los pares de agentes especifican una asignación estable y en los restantes casos, que no existe asignación estable.

Primer paso

El agente i realiza una propuesta a su agente más preferido. Este a su vez elimina todos los agentes que le significan una peor opción que i y por lo tanto estos elementos eliminan al agente i de sus respectivas listas. Si en este proceso de eliminación suprimimos un agente j con $j < i$, el agente j debe proponer a su siguiente mejor opción. El proceso continúa con la propuesta del agente $i + 1$.

El perfil resultante debe verificar la siguiente condición de estabilidad: si b es el primer agente en la lista de a entonces a es el último agente en la lista de b [7], o bien se obtiene un perfil donde existen listas vacías.

Resumiendo:

El primer paso del algoritmo está basado en la sucesión de propuestas de un agente a otro. Cuando un agente recibe una propuesta, entonces la considera y suprime cualquier propuesta peor a esa que tenga en su lista.

Cada agente propone a otros en el orden en que aparecen en su lista de preferencia, deteniéndose cuando una promesa de consideración de su oferta es recibida y acortando su sucesión de propuestas de acuerdo a los rechazos recibidos.

Este paso termina cuando

(i) Cada agente ha recibido una propuesta y se verifica la condición de estabilidad: si b es el primer agente en la lista de a entonces a es el último agente en la lista de b, o

[6] *Gusfield e Irving* (1990) denominan consistentes a las listas de un perfil simétrico. *Tan* utiliza el término tabla simétrica

[7] *Irving* (1985) denomina tabla estable a los perfiles que verifican esta condición.

(ii) un agente es rechazado por todos, con lo cual su lista (columna correspondiente en el perfil) resulta vacía.

Notemos que en este paso del algoritmo, cada agente recibe y hace propuestas, a diferencia del clásico caso del matrimonio, donde solamente las personas de un sexo pueden proponer y los miembros del sexo opuesto reciben propuestas [8].

Por lo tanto

i) Si alguna lista queda vacía entonces para ese modelo no existe asignación estable. Esos agentes constituyen agentes solos en las pre-asignaciones estables existentes.

ii) Si cada lista contiene exactamente un agente entonces estos pares de agentes constituyen las parejas de una asignación estable.

iii) Si alguna lista contiene más de un agente, entonces se debe continuar con el segundo paso del algoritmo

Irving (1984) probó que no importa el orden en que se comience el proceso de propuestas, el perfil resultante del paso 1 siempre es el mismo.

Consideraremos el ejemplo anterior con la notación convenida $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (donde $a = 1, b = 2, \cdots, h = 8$) y las relaciones de preferencia dadas anteriormente[9].

• El agente 1 propone a 3, luego eliminamos el agente 6 que se encuentra en la lista de 3 después de 1. Como el perfil debe continuar siendo simétrico eliminamos el agente 3 de la lista de 6, obteniendo: $4 \succ_3 2 \succ_3 1;\ 1 \succ_6 2 \succ_6 4 \succ_6 5 \succ_6 7$.

• 2 propone a 5, luego eliminamos: el agente 6 de la lista de 5 y 5 de la lista de 6.

• 3 propone a 4, eliminamos el agente 6 de la lista de 4 y el agente 4 de la lista de 6.

• 4 propone a 5, eliminamos el agente 2 de la lista de 5 y el agente 5 de la lista de 2.

Al haberse suprimido el agente 5 de la lista de 2, éste debe proponer a su siguiente opción.

• 2 propone a 3, eliminamos el agente 1 de la lista de 3 y el agente 3 de la lista de 1.

Al haberse suprimido el agente 3 de la lista de 1, éste debe proponer a su siguiente opción.

• 1 propone a 2, eliminamos el agente 6 de la lista de 2 y el agente 2 de la lista de 6.

Se continúa el proceso con el siguiente agente que aún no realizó una propuesta, en este caso el agente 5.

• Al proponer 5 a 1, éste elimina a 4 y 6 de su lista y ellos lo eliminan a él.

• 6 propone a 7, como no hay agentes que estén después de 6 en la lista de 7 no eliminamos ninguno.

• Proseguimos con 7 proponiendo a 8 y 8 proponiendo a 7, con lo que el agente 6 queda con su lista vacía.

El perfil de preferencias $\succ'_A$ obtenido es:
$2 \succ_1 5; 3 \succ_2 1; 4 \succ_3 2; 5 \succ_4 3; 1 \succ_5 4; 6 \succ_6 6; 8 \succ_7 7; 7 \succ_8 8$.

Como en el perfil resultante $(\succ'_A)$ las listas de los agentes tienen a su vez más de un agente debemos proseguir con el segundo paso del algoritmo.

[8] Algoritmo de aceptación diferida de *Gale y Shapley* (1962)

[9] $3 \succ_1 2 \succ_1 5 \succ_1 4 \succ_1 6; 5 \succ_2 3 \succ_2 1 \succ_2 6; 4 \succ_3 2 \succ_3 1 \succ_3 6; 5 \succ_4 1 \succ_4 3 \succ_4 6; 1 \succ_5 4 \succ_5 2 \succ_5 6; 1 \succ_6 2 \succ_6 3 \succ_6 4 \succ_6 5 \succ_6 7; 8 \succ_7 6; 7 \succ_8 8$.

Segundo Paso

En esta etapa, los agentes son eliminados sucesivamente del perfil, en una forma especial, hasta que cada agente tiene solamente un agente en su lista o hasta que alguno no tenga agentes en su lista o hasta que no se puedan eliminar agentes sin obtener listas vacías (determinando ciclos). La idea básica del segundo paso del algoritmo es la de eliminación de "rotaciones expuestas".

Para explicitar el algoritmo debemos considerar el concepto de rotaciones expuestas en el perfil de preferencias.

Definición 9 *Sea* $(A, \succ_A)$ *un modelo de asignación generalizado. Una* **rotación expuesta** R *en el perfil de preferencias* $\succ_A$ *denotada por* $R = C|B$ *con* $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$*,*
$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$*,* $C, B \subseteq A$*, es un conjunto ordenado de agentes tales que* b_i *es el primer agente en la lista de* a_i *y es el segundo agente en la lista de* $a_{i-1}, 1 < i \leq r$*;* *y* b_1 *es el primer agente en la lista de* a_1 *y es el segundo agente en la lista de* a_r*.*

Irving (1984) probó que, dado un perfil $\succ'_A$ en el paso 2, si hay un agente cuya lista tiene más de un agente, entonces hay una rotación expuesta en $\succ'_A$. Como el concepto de eliminación de una rotación juega un papel central en el algoritmo para encontrar una pre-asignación estable, damos un formal enunciado con este resultado.

Definición 10 *Sea* $R = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}|\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$ *una rotación expuesta en el perfil* $\succ_A$*. Se dice que la rotación* R *ha sido eliminada de* $\succ_A$*, si los siguientes agentes han sido eliminados de* $\succ_A$*:*

(i) *a)* *cada agente* x *de la lista de* b_1 *con* $a_r \succ_{b_1} x$
    b) *cada agente* x *de la lista de* b_i *con* $a_{i-1} \succ_{b_i} x, i = 2$ *hasta* r

(ii) *cada agente* b_i *de la lista de* x *donde el agente* b_i *es descripto en (i).*

Teorema 5 *(Tan, 1991) Sea* $\succ'_A$ *un perfil en el paso 2, y sea* $R = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}|\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$ *una rotación expuesta en* $\succ'_A$*. Si existe un agente* c *cuya lista no es vacía, pero que queda vacía luego de eliminar* R*, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i) *En el perfil* $\succ'_A$ *cada agente* a_k *tiene solamente dos agentes en su lista (*b_k *y* b_{k+1}*), para* $k = 1, \cdots, r-1$*. El agente* a_r *tiene solamente los agentes* b_r *y* b_1*.*

ii) $D = B$*, donde* $D = \{a_1, \cdots, a_r\}$ *y* $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$

iii) D *tiene cardinalidad impar*

iv) *El conjunto ordenado* $D = \{a_1, \cdots, a_r\}$ *es un ciclo impar*

v) $c \in D$

Si tenemos una rotación expuesta $R = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}|\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$ que satisface i) a iv) del teorema 5, entonces las listas de todos los agentes que forman la rotación tendrán listas vacías al eliminarse R. Decimos en este caso que $B_\mu = (a_1, \cdots, a_r)$ es un ciclo impar en toda pre-asignación estable de ese modelo.

En resumen, la adaptación del segundo paso del algoritmo de *Tan* (1991) puede describirse como sigue:

(i) Mientras algún agente tenga más de una entrada en su lista, y la lista no quede vacía, encontrar y eliminar una rotación expuesta

(ii) Si cada agente tiene exactamente un agente en su lista, entonces estas listas especifican una asignación estable.

(iii) Si hay uno con lista vacía, entonces no existe una asignación estable. Los agentes con lista vacía son los agentes solos de cualquier pre-asignación estable existente.

(iv) Si hay agentes que forman una rotación y sus listas quedan vacías al tratar de suprimirla, no se la debe eliminar ya que constituye un ciclo impar de las pre-asignaciones existentes (ver observación anterior).

Recordemos que, hasta el final del algoritmo, a está en la lista de b si y sólo si b está en la lista de a (perfil simétrico).

Continuación del ejemplo:
En este caso existe sólo la rotación expuesta $R = \{1, 4, 2, 5, 3\}|\{2, 5, 3, 1, 4\}$.
Al eliminar los agentes de la rotación R todos los agentes involucrados quedan con listas de preferencias vacías, luego por Teorema 5 y Observación anterior, $B_\mu = (1, 2, 3, 4, 5)$ es un ciclo impar.
Vemos que $2 \succ_1 5; 3 \succ_2 1; 4 \succ_3 2; 5 \succ_4 3; 1 \succ_5 4$, y en general, verifican:
$a_2 \succ_{a_1} a_r; a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1}, 1 < i < r$ y $a_1 \succ_{a_r} a_{r-1}$ (propiedades de ciclo).
Por lo tanto hemos determinado la pre-asignación estable

$$\mu = \{(1,(5,2)),(2,(1,3)),(3,(2,4)),(4,(3,5)),(5,(4,1)),(6,(6,6)),(7,(8,8)),(8,(7,7))\},$$

con $P_2(\mu) = \{\{7, 8\}\}$, $P_3(\mu) = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$, $P_1(\mu) = \{\{6\}\}$ y $P_4(\mu) = \emptyset$. Es decir, en μ se han designado una pareja, un ciclo de longitud 5 y un agente solo. En esta pre-asignación ordenada no existen cadenas, lo que da indicios de que μ es una pre-asignación estable.

μ es estable y como existen dos ciclos de longitud 1 (agente solo) y 5 respectivamente, por Corolario 4 podemos afirmar que para este modelo no existen asignaciones estables.

Luego podemos enunciar el resultado de *Tan-Hsueh* (1993) de la siguiente manera:

Teorema 6 *Para un modelo de asignación generalizado existe una pre-asignación estable definida por pares asignados y ciclos impares. El conjunto de agentes puede ser particionado como:*

a) agentes asignados a sí mismos (ciclos de longitud uno) *b) agentes - ciclos o compañeros de medio tiempo (ciclos de longitud impar mayor que uno)*

c) agentes asignados o parejas (ciclos de longitud dos).

Entonces, una pre-asignación estable μ para un modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$, particiona al conjunto A en tres familias $P_1(\mu), P_2(\mu), P_3(\mu)$ de ciclos de longitud uno, dos o impar mayor a uno, de tal forma que cada agente en A pertenece a alguno de estos ciclos.

El propósito es encontrar, cuando sea posible, las asignaciones estables para este modelo, para lo cual debemos lograr que todos los ciclos de las pre-asignaciones estables del modelo tengan cardinalidad par, o si esto no es posible, encontrar las pre-asignaciones estables, que sabemos siempre existen.

4. Cardinalidad de una pre-asignación estable

Para un mismo modelo de asignación generalizado pueden existir distintas asignaciones y/o pre-asignaciones estables.

Con la intención de establecer cuando una pre-asignación estable puede ser preferida a otra, introducimos la noción de cardinalidad de una pre-asignación ordenada, la que se determina en función al número de espacios (habitaciones, canchas, mesas de juego, etc.) que se le asigna a cada una. Posteriormente analizamos la relación entre las cantidades asignadas a distintas pre-asignaciones estables correspondientes a un mismo modelo.

Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado, sea $\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}$. Sabemos que μ define los conjuntos $P_1(\mu), P_2(\mu)$, $P_3(\mu)$, y $P_4(\mu)$ con $P_1(\mu) = \{\{a\} \subseteq S/\mu(a) = (a, a)\}$, la familia de agentes solos; $P_2(\mu) = \{\{a, b\} \subseteq S/\mu(a) = (b, b)\}$, la familia de parejas de agentes; $P_3(\mu) = \bigcup_{B_\mu \in \mathcal{A}} B_\mu$, la familia de ciclos B_μ de longitud mayor o igual a 3; y $P_4(\mu) = \bigcup_{\overline{B}_\mu \in \mathcal{C}} \overline{B}_\mu$, la familia de cadenas $\overline{B}_\mu$.

Establecemos $\frac{1}{2}$ como unidad de medida, indicando con tal valor que a dos agentes se les puede asignar el espacio por la mitad del tiempo establecido.

Sea B un ciclo o cadena, notemos con $\#_h(B)$ al número de espacios necesarios para los agentes de B y consideremos los siguientes casos:
1) Si $B = \{a\}$ es un ciclo de longitud uno, establecemos la convención $\#_h(B) = 0$. Es decir, a los agentes solos no se les asignarán espacios. Luego

$$\#_h(P_1(\mu)) = \sum_{B \in P_1(\mu)} \#_h(B) = 0$$

2) Si $B = \{a, b\}$ es un ciclo de longitud dos (pareja), $\#_h(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Es decir, a una

pareja le asignamos un espacio por tiempo completo. Por lo tanto

$$\#_h(P_2(\mu)) = \sum_{B \in P_2(\mu)} \#_h(B) = |P_2(\mu)|$$

3) Como cada $B_\mu \in \mathcal{B}$ es un ciclo de longitud mayor o igual a 3, entonces $\#_h(B_\mu) = \frac{1}{2} \cdot |B_\mu|$, luego

$$\#_h(P_3(\mu)) = \sum_{B_\mu \in \mathcal{B}} \#_h(B_\mu) = \sum_{B_\mu \in \mathcal{B}} \frac{|B_\mu|}{2}$$

Es decir, la asignación de espacios de un ciclo de longitud mayor a 1, se computa considerando que a cada par de compañeros de medio tiempo se le asigna un espacio por medio tiempo.
4) Como cada $\overline{B}_\mu \in \mathcal{C}$ es una cadena de longitud mayor o igual a 3, entonces recordando que los agentes de los extremos están asignados a sí mismos y a los agentes ubicados inmediatamente a su lado, tenemos:
$\#_h\left(\overline{B}_\mu\right) = \dfrac{|\overline{B}_\mu| - 1}{2}$, luego

$$\#_h(P_4) = \sum_{\overline{B}_\mu \in \mathcal{C}} \#_h\left(\overline{B}_\mu\right) = \sum_{\overline{B}_\mu \in \mathcal{C}} \frac{|\overline{B}_\mu| - 1}{2}$$

Es decir, la asignación de espacios para una cadena la realizamos asignando uno por medio tiempo a cada par de compañeros de medio tiempo, sin olvidar que los agentes de los extremos sólo tienen un compañero de medio tiempo.

En el ejemplo anterior:
$\mu = \{(1,(5,2)),(2,(1,3)),(3,(2,4)),(4,(3,5)),(5,(4,1)),(6,(6,6)),(7,(8,8)),(8,(7,7))\}$, le asignamos el siguiente número de espacios:
•$P_1(\mu) = \{\{6\}\}$, por convención a los agentes solos no les asignamos espacios, luego $\#_h(P_1(\mu)) = 0$.
•$P_2(\mu) = \{\{7,8\}\}$, por lo tanto $\#_h(P_2(\mu)) = |P_2(\mu)| = 1$.
• Al ciclo de longitud 5, $B_\mu = (1,2,3,4,5)$ se le asignan 5 espacios por medio tiempo.

$P_3(\mu) = \{\{1,2,3,4,5\}\}$ y $\#_h(P_3(\mu)) = \sum_{B_\mu \in \mathcal{B}} \frac{|B_\mu|}{2} = \frac{5}{2}$.

En conclusión el número de espacios asignados a una pre-asignación ordenada surge de la suma de los otorgados a cada conjunto $P_i(\mu), 1 \leq i \leq 4$, por lo que podemos definir:

Definición 11 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado, sea $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ el conjunto de pre-asignaciones ordenadas del modelo. Sea $\mu \in \mathcal{P}_\mathcal{M}$, que define los conjuntos $P_1(\mu), P_2(\mu)$, $P_3(\mu)$ y $P_4(\mu)$. La* **cardinalidad de la pre-asignación ordenada** *μ está dada por el número:*

$$\begin{aligned}\#_h(\mu) &= \#_h(P_1(\mu)) + \#_h(P_2(\mu)) + \#_h(P_3(\mu)) + \#_h(P_4(\mu)) \\ &= 0 + |P_2(\mu)| + \sum_{B_\mu \in \mathcal{B}} \frac{|B_\mu|}{2} + \sum_{\overline{B}_\mu \in \mathcal{C}} \frac{|\overline{B}_\mu| - 1}{2}.\end{aligned}$$

Luego para el ejemplo anterior $\#_h(\mu) = 0 + 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

Observación 1 *Como toda pre-asignación estable μ es una pre-asignación ordenada con $P_4(\mu) = \emptyset$, y todas las pre-asignaciones estables de un modelo dado, tienen los mismos ciclos impares (Corolario 6), entonces la* **cardinalidad de la pre-asignación estable** *μ está dada por:*

$$\#_h(\mu) = \#_h(P_1(\mu)) + \#_h(P_2(\mu)) + \#_h(P_3(\mu)) = |P_2(\mu)| + \sum_{B_\mu \in \mathcal{B}} \frac{|B_\mu|}{2}$$

En un modelo dado la cardinalidad que le corresponde a una pre-asignación estable, no depende de la pre-asignación estable encontrada, como lo muestra el siguiente teorema, cuya demostración es inmediata del Corolario 6.

Teorema 7 *Si μ y μ' son pre-asignaciones estables del modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$, entonces tienen la misma cardinalidad.*

Es decir

$$\#_h(\mu) = \#_h(\mu')$$

.

Teniendo en cuenta que, si una pre-asignación estable no contiene ciclos de cardinalidad impar es una asignación estable (Corolario 4), nos limitamos a referirnos a pre-asignaciones, particularizando a asignaciones sólo si es necesario.

Con la finalidad de contar con un criterio de selección entre las pre-asignaciones estables, deseamos analizar si existe variación en la cardinalidad $\#_h(\mu)$ de pre-asignaciones estables que sólo difieren en un agente. Aplicamos para ello una adaptación a este modelo de uno de los resultados de *Tan-Hsueh* (1995).

Teorema 8 *(Tan - Hsueh, 1995) Sea μ una pre-asignación estable en el modelo de asignación generalizado $(A, \succ_A)$, agregando un nuevo agente al modelo resulta el número de ciclos impares incrementado en 1 o decrementado en 1. Además*

i) Cuando el número de ciclos impares se incrementa en 1, todos los ciclos impares originales continúan existiendo en el nuevo modelo, mientras que un nuevo ciclo impar se ha formado.

ii) Cuando el número de ciclos impares decrece en 1, uno de los ciclos impares existentes ha sido eliminado, y el resto de los ciclos impares continúan igual en el nuevo modelo.

Si se elimina un agente del modelo se obtiene el mismo efecto en el número de ciclos impares.

Nuestra intención es aplicar este resultado para analizar la variación en la cardinalidad de las pre-asignaciones estables de modelos que difieren en un agente. Para ello, consideramos los distintos casos que se pueden llegar a presentar cuando se incorpora un agente al conjunto y demostramos que el nuevo modelo puede tener asignado el mismo número de espacios o a lo sumo uno más.

Proposición 7 *Sean μ y μ' pre-asignaciones estables de los modelos de asignación generalizados $(A, \succ_A)$ y $(A \cup \{x\}, \succ_{A\cup\{x\}})$, respectivamente, donde $\succ_{A\cup\{x\}}$ se obtiene de $\succ_A$ agregando la lista de preferencias del agente x y al agente x a las listas de los agentes que deseen incorporarlo. Entonces $\#_{\mathbf{h}}(\mu) \leq \#_{\mathbf{h}}(\mu') \leq \#_{\mathbf{h}}(\mu) + \mathbf{1}$.*

5. El modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad

En economía la mejor forma de asignar recursos escasos es un problema largamente estudiado, los modelos de asignación con restricción de capacidad proporcionan una respuesta.

Consideraremos en este capítulo una variante del modelo de asignación generalizado presentado en el capítulo 1, donde los agentes han sido asignados unos con otros, teniendo en cuenta solamente las preferencias de los agentes, a través de una asignación estable o en su defecto de una pre-asignación estable. En esta oportunidad supondremos que la empresa que ofrece los espacios (habitaciones, canchas, etc.), que serán distribuidos entre los agentes, establece un número máximo, al que denominamos cuota, que puede no cubrir todas las necesidades de los agentes. Esta variante fue planteada por *Femenia, D., Marí, M., Neme, A* y *Oviedo, J.* (2006) para el modelo de asignación uno a uno.

El modelo

Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado. Sea $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ el conjunto de pre-asignaciones ordenadas de este modelo. Supongamos que la empresa E que ofrece los espacios, tiene preferencia P_E sobre las pre-asignaciones ordenadas que pueden definirse y dispone de sólo q espacios[10], $q \leq n = |A|$.

Nuestro propósito es estudiar el modelo de asignación denominado **modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad**, que denotamos por $((A, \succ_A), P_E, q)$ y las asignaciones y pre-asignaciones estables que podemos definir en él.

Con el fin de establecer diferencias entre las distintas pre-asignaciones estables que podemos determinar en un modelo, introducimos los siguientes conceptos

Sea $\mu \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ una pre-asignación ordenada en el modelo $(A, \succ_A)$. Llamamos $m(\mu)$ al conjunto de agentes de A que están asignados en parejas, ciclos o cadenas de longitud tres o más.

Es decir: $m(\mu) = \{x \in A : \mu(x) \neq (x, x)\}$.

Definimos además dos pre-asignaciones ordenadas que nos serán muy útiles en el futuro. En primer lugar la que denominamos $\mu^{\emptyset}$, que asigna cada agente a sí mismo, es decir define a todos los agentes como solos.

[10]Si consideramos que la empresa tiene cualquier preferencia sobre las pre-asignaciones podemos obtener falta de estabilidad en el modelo considerado con restricción de cuota. En este trabajo definimos una extensión de las preferencias individuales de la empresa sobre los agentes a preferencias sobre pre-asignaciones y demostramos que utilizando esta extensión, denominada extensión *responsive*, el conjunto de pre-asignaciones estables que podemos definir en este modelo restringido es no vacío.

Formalmente:

$$\mu^{\emptyset}(f) = (f, f) \text{ para todo } f \in A$$

En consecuencia en esta pre-asignación ordenada para todo agente $x \in A$, $\{x\} \in P_1(\mu^{\emptyset})$ y $P_2(\mu^{\emptyset}) = P_3(\mu^{\emptyset}) = P_4(\mu^{\emptyset}) = \emptyset$

Teniendo en cuenta la cuota establecida por la empresa E, las asignaciones y pre-asignaciones estables con cardinalidad menor o igual a q son aceptadas por la empresa siempre que, según su orden de preferencia P_E, éstas sean mejores que la pre-asignación $\mu^{\emptyset}$. Es decir,

$$\mu \text{ es aceptada por } E \text{ si } \#_h(\mu) \leq q \text{ y } \mu \; P_E \; \mu^{\emptyset}.$$

En segundo lugar, definimos una pre-asignación ordenada denominada $\mu_{\{x,y\}}$, que considera las mismas asignaciones indicadas en una pre-asignación ordenada dada μ, excepto para los agentes x e y previamente seleccionados, que son asignados entre sí, y para sus anteriores compañeros, si los hubiere. A los anteriores compañeros se los transforma en agentes solos si provenían de una pareja o agentes asignados medio tiempo a sí mismos y medio tiempo con la mejor opción que tenían por μ si formaban parte de un ciclo.

En símbolos:

$$\mu_{\{x,y\}}(f) = \begin{cases} (y, y) & \text{si } f = x \\ (x, x) & \text{si } f = y \\ (f, f) & \text{si } f = \mu_1(x) = \mu_2(x) \neq x \text{ o } f = \mu_1(y) = \mu_2(y) \neq y \\ (f, \mu_1(f)) & \text{si } x = \mu_2(f) \neq \mu_1(f) \text{ o } y = \mu_2(f) \neq \mu_1(f) \\ (f, \mu_2(f)) & \text{si } x = \mu_1(f) \neq \mu_2(f) \text{ o } y = \mu_1(f) \neq \mu_2(f) \\ \mu(f) & \text{si } f \notin \{x, y, \mu_1(x), \mu_2(x), \mu_1(y), \mu_2(y)\} \end{cases}$$

Partimos entonces de una pre-asignación estable μ y constituimos con x e y una pareja. Si alguno de estos agentes formaba, en μ, parte de otra pareja, su excompañero se transforma en agente solo. Si x o y estaba asignado en un ciclo, supongamos $x = a_i$, este ciclo pierde su condición de tal al asignar a la peor opción de x (a_{i-1}) medio tiempo consigo mismo y medio tiempo con a_{i-2} y a la mejor opción de x en el ciclo (a_{i+1}), medio tiempo consigo mismo y medio tiempo con a_{i+2}. Los restantes agentes continúan asignados como en μ.

Pre-asignaciones $q-$estables

Consideramos el modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad, denotado por $((A, \succ_A), P_E, q)$.

Partiendo de la premisa que la empresa puede elegir las pre-asignaciones estables de acuerdo a sus preferencias y a su restricción de cuota q, nuestro propósito ahora es extender el concepto de pre-asignación estable a este modelo.

Para lograr esto debemos ampliar las nociones de bloqueo y estabilidad. Como se ha establecido una restricción de capacidad, los conceptos de bloqueo y estabilidad deben tener en cuenta esta exigencia, denominamos a estas nuevas nociones $q-$*bloqueo* y $q-$*estabilidad.*

En la noción de par bloqueante se consideró solamente que los agentes se preferían mutuamente antes que sus asignaciones. En el caso actual no siempre un par de agentes que se prefieren mutuamente constituye un bloqueo, por dos razones esenciales:

1) Al satisfacer el bloqueo la cardinalidad de la nueva pre-asignación estable puede exceder la cuota establecida.

2) La reciente pre-asignación estable es peor para la empresa que la original.

A la empresa le son indiferentes dos pre-asignaciones estables que tienen la misma cardinalidad y asignan a los mismos agentes. Es decir, si $\#_h(\mu) = \#_h(\mu')$ y $m(\mu) = m(\mu')$ entonces $\mu \sim_E \mu'$, indicando con $\sim_E$ la indiferencia de E entre pre-asignaciones estables.

Por razones de practicidad, suponemos que todos los agentes son mutuamente aceptables.

Definición 12 *Sea $((A, \succ_A), P_E, q)$ un modelo de asignación generalizado con restricción de cuota q. Sea μ una pre-asignación ordenada en este modelo. Sea P_E las preferencias de E sobre todas las pre-asignaciones ordenadas. $\{x, y\} \subseteq A$ es un $q-$***bloqueo** *para μ si*

i) $x, y \in m(\mu)$, $y \succ_x \mu_1(x)$ e $x \succ_y \mu_1(y)$ ó

ii) $y \notin m(\mu)$, $y \succ_x \mu_1(x)$, $x \succ_y y$, $\mu_{\{x,y\}} P_E \mu$ y $\#_h\left(\mu_{\{x,y\}}\right) \leq q$.

Entonces para establecer si el par $\{x, y\}$ constituye un $q-$**bloqueo** para μ necesitamos realizar dos análisis. En primer lugar si no son agentes solos ($x, y \in m(\mu)$). En ese caso, investigamos si prefieren estar asignados entre sí antes que con los compañeros designados.

En segundo lugar consideramos que uno de ellos esté solo (por ejemplo y). En esta oportunidad debemos verificar que los agentes se prefieren mutuamente (x prefiere a y antes que al agente que tiene asignado e y prefiere a x antes que estar solo), que a la empresa le interesa la pre-asignación en la que estos agentes están juntos antes que la pre-asignación anterior ($\mu_{\{x,y\}} P_E \mu$) y que la cardinalidad de esta nueva pre-asignación estable no excede q ($\#_h\left(\mu_{\{x,y\}}\right) \leq q$).

Dado el modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad $((A, \succ_A), P_E, q)$, una pre-asignación individualmente racional es $q-$**estable** si no posee pares $q-$bloqueantes.

Ejemplo: Sea el modelo $(A, \succ_A)$, con $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y el siguiente perfil de preferencias: $3 \succ_1 2 \succ_1 5 \succ_1 4 \succ_1 6 \succ_1 7 \succ_1 8; 5 \succ_2 3 \succ_2 1 \succ_2 6 \succ_2 4 \succ_2 8 \succ_2 7;$
$4 \succ_3 2 \succ_3 1 \succ_3 6 \succ_3 5 \succ_3 7 \succ_3 8; 5 \succ_4 1 \succ_4 3 \succ_4 6 \succ_4 2 \succ_4 7 \succ_4 8;$
$1 \succ_5 4 \succ_5 2 \succ_5 6 \succ_5 3 \succ_5 8 \succ_5 7; 1 \succ_6 2 \succ_6 3 \succ_6 4 \succ_6 5 \succ_6 7 \succ_6 8;$
$8 \succ_7 6 \succ_7 2 \succ_7 1 \succ_7 5 \succ_7 4 \succ_7 3; 7 \succ_8 1 \succ_8 2 \succ_8 3 \succ_8 4 \succ_8 5 \succ_8 6.$

Sea $q = 3$. Consideremos que las preferencias P_E de la empresa sobre las pre-asignaciones ordenadas son tales que $\mu P_E \mu'$ si y sólo si $i < j$ para todo $i \in m(\mu)$ y $j \in m(\mu')$.

La pre-asignación ordenada $\mu' \equiv \{(1, 4, 2, 5, 3), \{6\}, \{7\}, \{8\}\}$ tiene $\#_h(\mu') = 5 \cdot \frac{1}{2} < 3$.

μ' es 3-estable. En efecto, podemos analizar, por ejemplo, que el par $\{7, 8\}$ podrían verse como un par bloqueante, pero si bien entre sí se prefieren antes que quedarse solos, a la empresa la pre-asignación $\mu'_{\{7,8\}}$ no le satisface pues $\mu' P_E \mu'_{\{7,8\}}$ y además $\#_h\left(\mu'_{\{7,8\}}\right) = 5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} > 3$. Luego el par $\{7, 8\}$ no es un $q-$bloqueo y μ' es 3-estable.

Indicamos con $\mathcal{S}(A, \succ_A)$ al conjunto de las pre-asignaciones estables en el modelo $(A, \succ_A)$ y con $\mathcal{S}_q((A, \succ_A), P_E)$ al conjunto de las pre-asignaciones $q-$estables, es decir estables para el modelo $((A, \succ_A), P_E, q)$.

Relación entre las pre-asignaciones estables y las pre-asignaciones $q-$estables

Nos preguntamos si las pre-asignaciones estables en un modelo dado, continúan siendo estables cuando se ha agregado la cláusula de cuota. La respuesta es afirmativa bajo ciertas condiciones, como lo muestra la siguiente propiedad.

Proposición 8 *Si una pre-asignación estable μ en el modelo $(A, \succ_A)$ es aceptable para la empresa E, entonces es $q-$estable.*

6. Existencia y caracterización de estabilidad

Sea $((A, \succ_A), P_E, q)$ el modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad. Partimos de suponer que la empresa, que provee los espacios, tiene preferencias sobre pre-asignaciones ordenadas. Mostramos que, en general, el conjunto de las pre-asignaciones $q-$estables para ciertas preferencias de la empresa puede ser vacío, para posteriormente probar que este conjunto es no vacío si consideramos extensiones responsive de sus preferencias individuales.

Como vimos en la Proposición 8, es posible asegurar la existencia de pre-asignaciones $q-$estables cuando ellas son aceptables para la empresa E. Sin embargo, dicha existencia no está garantizada cuando esto no ocurre, como ilustramos en el siguiente ejemplo:

Sea $((A, \succ_A), P_E, 2)$, con $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\succ_A$ dado por $4 \succ_1 5 \succ_1 2 \succ_1 3$;
$5 \succ_2 1 \succ_2 3 \succ_2 4; 5 \succ_3 1 \succ_3 2 \succ_3 4; 2 \succ_4 1 \succ_4 5 \succ_4 \succ_4 3; 1 \succ_5 3 \succ_5 2 \succ_5 4$.

Para la empresa todos los agentes son aceptables pero establece sus preferencias según los agentes y las pre-asignaciones ordenadas de la siguiente manera: $i \succ_E j$ si y sólo si $i < j$; $\mu P_E \mu'$ si y sólo si $\#_h(\mu) > \#_h(\mu')$.

Esto significa que a la empresa le interesan sólo las pre-asignaciones estables que ocupan el mayor número de espacios, y le resultan indiferentes todas aquellas que tienen la misma cantidad y que sólo difieren en la forma de asignar a los agentes. Es decir que $\mu \sim_E \mu'$ si $\#_h(\mu) = \#_h(\mu')$, indicando con $\sim_E$ que la empresa prefiere a μ tanto como a μ', es decir que le es indiferente que se elija μ ó μ'.

Entonces cualquier pre-asignación estable μ con $\#_h(\mu) < 2$ no será 2-estable en este modelo.

A continuación detallamos las pre-asignaciones ordenadas que verifican $\#_h(\mu) = 2$.

$\mu^1 = \{(1, (4, 4)), (2, (3, 3)), (3, (2, 2)), (4, (1, 1)), (5, (5, 5))\}$ bloqueada por $\{2, 5\}$.

$\mu^2 = \{(1, (4, 4)), (2, (5, 5)), (3, (3, 3)), (4, (1, 1)), (5, (2, 2))\}$, está bloqueada por $\{3, 5\}$.

$\mu^3 = \{(1, (4, 4)), (3, (5, 5)), (2, (2, 2)), (4, (1, 1)), (5, (3, 3))\}$ está bloqueada por $\{2, 4\}$.

$\mu^4 = \{(1, (5, 5)), (2, (3, 3)), (3, (2, 2)), (4, (4, 4)), (5, (1, 1))\}$ está bloqueada por $\{1, 4\}$.

$\mu^5 = \{(1,(5,5)),(2,(2,2)),(3,(4,4)),(4,(3,3)),(5,(1,1))\}$ está bloqueada por $\{1,4\}$.
$\mu^6 = \{(1,(5,5)),(2,(4,4)),(3,(3,3)),(4,(2,2)),(5,(1,1))\}$ está bloqueada por $\{2,3\}$.
$\mu^7 = \{(1,(2,2)),(3,(4,4)),(4,(3,3)),(2,(1,1)),(5,(5,5))\}$ está bloqueada por $\{1,4\}$.
$\mu^8 = \{(1,(2,2)),(3,(5,5)),(4,(4,4)),(2,(1,1)),(5,(3,3))\}$ está bloqueada por $\{1,4\}$.
$\mu^9 = \{(1,(2,2)),(2,(1,1)),(3,(3,3)),(4,(5,5)),(5,(4,4))\}$ está bloqueada por $\{1,4\}$.
$\mu^{10} = \{(1,(3,3)),(2,(4,4)),(3,(1,1)),(4,(2,2)),(5,(5,5))\}$ está bloqueada por $\{2,5\}$.
$\mu^{11} = \{(1,(3,3)),(2,(5,5)),(3,(1,1)),(4,(4,4)),(5,(2,2))\}$ está bloqueada por $\{1,4\}$.
$\mu^{12} = \{(1,(3,3)),(2,(2,2)),(3,(1,1)),(4,(5,5)),(5,(4,4))\}$ bloqueada por $\{1,4\}$.
$\mu^{13} = \{(1,(1,1)),(2,(3,3)),(3,(2,2)),(4,(5,5)),(5,(4,4))\}$ está bloqueada por $\{2,5\}$.
$\mu^{14} = \{(1,(1,1)),(2,(4,4)),(3,(5,5)),(4,(2,2)),(5,(3,3))\}$ está bloqueada por $\{1,5\}$.
$\mu^{15} = \{(1,(1,1)),(2,(5,5)),(3,(4,4)),(4,(3,3)),(5,(2,2))\}$ está bloqueada por $\{1,4\}$.
$\mu^{16} = \{(1,(1,4)),(2,(4,5)),(3,(3,5)),(4,(1,2)),(5,(2,3))\}$ está bloqueada por $\{5,3\}$.
$\mu^{17} = \{(1,(1,4)),(2,(4,3)),(3,(2,5)),(4,(1,2)),(5,(5,3))\}$ está bloqueada por $\{5,3\}$.
$\mu^{18} = \{(1,(5,4)),(2,(4,5)),(3,(3,3)),(4,(1,2)),(5,(2,1))\}$ está bloqueada por $\{5,3\}$.
$\mu^{19} = \{(1,(5,4)),(2,(2,4)),(3,(3,5)),(4,(1,2)),(5,(3,1))\}$ está bloqueada por $\{2,3\}$.

Esto implica que, con las preferencias dadas para este modelo, el conjunto de las pre-asignaciones $q-$estables para $q = 2$ es vacío. Es decir, $\mathcal{S}_q((A,\succ_A),P_E) = \emptyset$

Cardinalidad de una pre-asignación estable en un Modelo reducido

Sea $(A,\succ_A)$ un modelo de asignación generalizado, denotamos con $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ al conjunto de agentes y con $\succ_A$ el perfil de preferencias de los agentes. Supongamos que con $\succ_E$ indicamos las preferencias de E sobre los agentes de A.

Sin pérdida de generalidad y con la intención de simplificar la notación, suponemos que $x_1 \succ_E x_2 \succ_E x_3 \succ_E \cdots \succ_E x_n$, de tal forma que $x_i \succ_E x_j$ para todo $i < j$. Es decir que, los agentes identificados con el subíndice menor son más preferidos por E que los de subíndice mayor.

Consideremos los conjuntos $A^i = \{x_1, \cdots, x_i\}$, que podemos obtener eliminando de A los agentes menos preferidos por la empresa E con respecto al agente x_i, y sean $\succ_{A^i}$ los perfiles que se obtienen del perfil $\succ_A$ suprimiendo a los agentes que no pertenecen a A^i.

Notemos con $N = \{1, 2, \cdots n\}$, al conjunto de subíndices.

Definimos una pre-asignación ordenada μ en los modelos reducidos de tal forma que asigna a los agentes de A^i con agentes de A^i. Definimos la extensión de μ al modelo $(A,\succ_A)$ considerando solos a los agentes de $A \setminus A^i$. Por abuso del lenguaje notamos también con μ a esta pre-asignación ordenada extendida al modelo general.

Para $i \in N$ denotamos con $(A^i,\succ_{A^i})$ los modelos reducidos de $(A,\succ_A)$ y con $\mathcal{S}(A^i,\succ_{A^i})$ al conjunto de las pre-asignaciones estables en estos modelos reducidos. Entendiendo que cuando escribimos $\mu \in \mathcal{S}(A^i,\succ_{A^i})$ estamos analizando la estabilidad de la restricción de μ a A^i.

Ilustramos estos modelos y las pre-asignaciones ordenadas que podemos definir en ellos en el siguiente ejemplo:

Sea el modelo de asignación generalizado $(A,\succ_A)$, con $A = \{1,2,3,4\}$ y el perfil de preferencias: $3 \succ_1 2 \succ_1 4; 3 \succ_2 1 \succ_2 4; 4 \succ_3 2 \succ_3 1; 1 \succ_4 3 \succ_4 2$.

Los posibles modelos reducidos que podemos considerar son: $(A^1, \succ_{A^1})$, $(A^2, \succ_{A^2})$, $(A^3, \succ_{A^3})$ y $(A^4, \succ_{A^4})$, detallamos dos de los casos que se pueden presentar.

• En el modelo $(A^1, \succ_{A^1})$, con $A_1 = \{1\}$ y $\succ_{A^1}$ dado por $1 \succ_1 1$ la única posible pre-asignación ordenada es $\mu^\emptyset$, que es estable en este modelo.

Por convención a los agentes solos no se les asigna espacio luego $\#_h(\mu^\emptyset) = 0$. Es decir $\mathcal{S}(A^1, \succ_{A^1}) = \{\mu^\emptyset\}$.

• En $(A^4, \succ_{A^4}) = (A, \succ_A)$ las pre-asignaciones ordenadas que pueden ser estables son $\mu^\emptyset, \mu^1, \mu^2$, μ^3, $\mu^4 = \{(1,(4,4)),(2,(2,2)),(3,(3,3)),(4,(1,1))\}$, $\mu^5 = \{(1,(1,1)),(2,(2,2)),(3,(4,4)),(4,(3,3))\}$, $\mu^6 = \{(1,(2,2)),(2,(1,1)),(3,(4,4)),(4,(3,3))\}$, $\mu^7 = \{(1,(4,4)),(2,(3,3)),(3,(2,2)),(4,(1,1))\}$ y $\mu^8 = \{(1,(4,3)),(2,(2,2)),(3,(1,4)),(4,(3,1))\}$, con cardinalidad $\#_h(\mu^4) = 1$, $\#_h(\mu^5) = 1$, $\#_h(\mu^6) = 2$, $\#_h(\mu^7) = 2$ y $\#_h(\mu^8) = \dfrac{3}{2}$.

Vemos que $\mu^\emptyset, \mu^1, \mu^2$, μ^3, μ^4 y μ^5 nos son estables en este modelo ya que se encuentran bloqueadas por $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,3\}$,$\{3,4\}$, $\{1,3\}$ y $\{1,2\}$ respectivamente. μ^6, μ^7 y μ^8 son estables.

Por lo tanto $\mathcal{S}(A^4, \succ_{A^4}) = \{\mu^6, \mu^7, \mu^8\}$

Observamos que la cardinalidad de las pre-asignaciones estables definidas en los modelos de asignación generalizados reducidos $(A^i, \succ_{A^i})$ y $(A^{i+1}, \succ_{A^{i+1}})$, coincide o difiere en una constante menor o igual a 1. Esta propiedad la enunciamos en la siguiente proposición, cuya demostración es inmediata de la proposición 7.

Proposición 9 *Dados los modelos de asignación generalizados $(A^i, \succ_{A^i})$ y $(A^{i+1}, \succ_{A^{i+1}})$. Para todo $\mu \in S(A^i, \succ_{A^i})$ y para todo $\mu' \in S(A^{i+1}, \succ_{A^{i+1}})$ se verifica* $\#_h(\mu') = \begin{cases} \#_h(\mu), \text{ ó} \\ \#_h(\mu) + \dfrac{1}{2}, \text{ ó} \\ \#_h(\mu) + 1. \end{cases}$

6.1. Preferencias responsive entre pre-asignaciones

Como hemos mostrado que en un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad $((A, \succ_A), P_E, q)$ con cualquier preferencia P_E de la empresa sobre $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ podemos no obtener $q-$estabilidad. Vamos a analizar bajo qué condiciones podemos asegurar la existencia de pre-asignaciones $q-$estables.

Sea E la empresa que ofrece espacios a pares de agentes de A, a tiempo completo o a medio tiempo. Vamos a considerar que la empresa tiene preferencias individuales $\succ_E$ sobre los agentes de A que pueden ser asignados.

Luego podemos dar la siguiente extensión responsive de la preferencia de la empresa sobre los agentes.

Definición 13 *Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado. Sea $\succ_E$ la preferencia de E sobre A. Sean μ, μ' dos pre-asignaciones estables. Sea $\#_h(\mu)$ y $\#_h(\mu')$ la cantidad de espacios asignados a μ y μ', respectivamente. Sea $m(\mu)$ y $m(\mu')$ los conjuntos de parejas y ciclos de longitud mayor o igual a 3 de μ y μ', respectivamente. Una preferencia $\succ_E^*$ sobre el conjunto $\mathcal{S}(A, \succ_A)$ es una* **extensión responsive** *de $\succ_E$ si verifica una de las siguientes condiciones:*

1) $\mu \succ_E^* \mu^\emptyset$ *si y sólo si* $x \succ_E \emptyset$*, para todo* $x \in m(\mu)$ *y* $\#_h(\mu) \leq q$*.*

2) Si $\#_h(\mu) > \#_h(\mu')$ *y* $\mu \succ_E^* \mu^\emptyset$ *entonces* $\mu \succ_E^* \mu'$*.*

3) Si $\#_h(\mu) = \#_h(\mu') \leq q$ *y* $m(\mu) = m(\mu') \cup \{b\} \setminus \{a\}$ *para* $a \in m(\mu')$ *y* $b \notin m(\mu')$ *entonces* $\mu \succ_E^* \mu'$ *si y sólo si* $b \succ_E a$*.*

4) Si $\#_h(\mu) = \#_h(\mu') \leq q$ *y* $m(\mu) = m(\mu')$ *entonces* $\mu \sim_E \mu'$

Podemos observar que pueden existir preferencias responsive distintas que respeten el mismo orden individual.

Indicamos con $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ al modelo de asignación generalizado con restricción de cuota q y preferencia responsive $\succ_E^*$.

Considerando la preferencia responsive $\succ_E^*$ definida sobre las pre-asignaciones estables de $(A, \succ_A)$, debemos redefinir la noción de $q-$bloqueo en el modelo de asignación generalizado $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$.

Definición 14 *Sea* $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ *un modelo de asignación generalizado, con restricción de cuota* q*. Sea* μ *una pre-asignación estable del modelo. Sea* $\succ_E$ *la preferencia de la empresa* E *sobre los agentes de* A*. Sea* $\succ_E^*$ *la preferencia responsive definida sobre* $\mathcal{S}(A, \succ_A)$*.*
$\{x, y\} \subseteq A$ *es un* $q-$***bloqueo*** *para* μ *si y sólo si*

i) $x, y \in m(\mu)$*,* $y \succ_x \mu_1(x)$ *y* $x \succ_y \mu_1(y)$ *ó*
ii) $y \notin m(\mu)$*,* $y \succ_x \mu_1(x)$*,* $x \succ_y y$*,* $\mu_{\{x,y\}} \succ_E^* \mu$ *y* $\#_h\left(\mu_{\{x,y\}}\right) \leq q$*.*

Continuación del ejemplo:
Hemos analizado los posibles modelos reducidos que podemos considerar, $(A^1, \succ_{A^1})$, $(A^2, \succ_{A^2})$, $(A^3, \succ_{A^3})$ y $(A^4, \succ_{A^4})$. Consideramos que la empresa establece una cuota $q = 1$.

- En $(A^1, \succ_{A^1})$, $\mu^\emptyset$ es 1-estable. $\mathcal{S}_1((A^1, \succ_{A^1}), \succ_E^*) = \{\mu^\emptyset\} = \mathcal{S}(A^1, \succ_{A^1})$.
- En $(A^4, \succ_{A^4}) = (A, \succ_A)$ las pre-asignaciones 1-estables son μ^1, μ^2 y μ^3.

$\mathcal{S}_1((A^4, \succ_{A^4}), \succ_E^*) = \{\mu^1, \mu^2, \mu^3\}$ y $\mathcal{S}(A^4, \succ_{A^4}) = \{\mu^6, \mu^7, \mu^8\}$.

6.2. Existencia de estabilidad

Consideremos el modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$.

Supongamos que la empresa E establece una preferencia sobre todos los agentes de A y sobre las pre-asignaciones estables que se pueden definir, siendo $\succ_E^*$ sus preferencias responsive. Nuestro objetivo es mostrar que, bajo tal restricción, la existencia de pre-asignaciones q-estables está garantizada. Posteriormente caracterizamos al conjunto de las pre-asignaciones $q-$estables analizándolas en dos secciones. En primer lugar cuando las pre-asignaciones tienen cardinalidad *igual* a q, y en segundo lugar cuando tienen cardinalidad *menor* a q. Finalmente mostramos la invariancia del conjunto de los q-estables, respecto a distintas extensiones responsive de la empresa.

Sean $\succ_E$ las preferencias entre agentes y $\succ_E^*$ las preferencias responsive entre pre-asignaciones estables de la empresa E. Por razones de practicidad supongamos que todos los agentes de A son aceptables para la empresa E, entonces $\mu \succ_E^* \mu^{\emptyset}$.

Ya hemos demostrado que el conjunto de pre-asignaciones estables de un modelo $(A, \succ_A)$ es no vacío, es decir $\mathcal{S}(A, \succ_A) \neq \emptyset$. Queremos analizar si el conjunto de pre-asignaciones estables para el modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ es también no vacío.

Es decir, queremos probar que $\mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*) \neq \emptyset$. Para ello estudiemos las siguientes propiedades.

Lema 2 *Sea μ una pre-asignación estable en el modelo reducido $(A^i, \succ_{A^i}), i \in N$ y extendida al modelo $(A, \succ_A)$ que verifica:*

i) $\#_h(\mu) \leq q$,

ii) los agentes solos no son mutuamente aceptables;

entonces μ es $q-$estable en el modelo $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$.

Dado que el problema del matrimonio es un caso particular del problema de asignación generalizado, las siguientes propiedades son una extensión, al modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad, del modelo planteado por *Femenía y otros* (2008).

En primer lugar mostramos que en un modelo generalizado con restricción de capacidad y preferencias responsive de la empresa, siempre existen pre-asignaciones $q-$estables.

Teorema 9 *Sea $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ un modelo de asignación generalizado con restricción de cuota q y $\succ_E^*$ las preferencias responsive de la empresa E. Entonces el conjunto de pre-asignaciones $q-$estables es no vacío.*

Deseamos ahora encontrar todas las pre-asignaciones $q-$estables de un modelo generalizado con restricción de capacidad, para ello analizamos sus propiedades.

6.3. Caracterización

Como para todo modelo generalizado el conjunto de pre-asignaciones estables es no vacío (Corolario 3) podemos afirmar que existen pre-asignaciones estables para todo modelo reducido. Formalmente $\mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i}) \neq \emptyset$ para $i \in N$.

Caracterizamos las pre-asignaciones $q-$estables en dos partes, la primera cuando tienen cardinalidad igual a q y la segunda cuando tienen cardinalidad menor que q.

En el modelo $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ consideremos las pre-asignaciones estables de los conjuntos $\mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i}), i \in N$, con cardinalidad igual a q y definamos a partir de ellas un nuevo conjunto al que denominamos $M_q(A^i, \succ_{A^i})$.

Para cada $i \in N$, $M_q(A^i, \succ_{A^i})$ es el siguiente conjunto:

$$M_q(A^i, \succ_{A^i}) = \left\{ \mu \in \mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i}) : \#_h(\mu) = q \right\},$$

y notemos con

$$M_q(A, \succ_A) = \bigcup_{i \in N} M_q(A^i, \succ_{A^i}).$$

Mostramos a continuación cómo se construyen dichos conjuntos y que pueden ser no vacíos.

Continuación del ejemplo:

Sea $\succ_E$ tal que $i \succ_E j$ si y sólo si $i < j$.

Los posibles modelos reducidos son: $((A^1, \succ_{A^1}), \succ_E^*, 1), ((A^2, \succ_{A^2}), \succ_E^*, 1), ((A^3, \succ_{A^3}), \succ_E^*, 1)$ y $((A^4, \succ_{A^4}), \succ_E^*, 1)$.

Para $((A^1, \succ_{A^1}), \succ_E^*, 1)$: La única pre-asignación estable en este modelo es $\mu^\emptyset$, $\mu^\emptyset \in \mathcal{S}(A^1, \succ_{A^1})$, con $\#_h(\mu^\emptyset) = 0$, por lo tanto $M_1(A^1, \succ_{A^1}) = \emptyset$.

Para $((A^2, \succ_{A^2}), \succ_E^*, 1)$: La única pre-asignación estable en este modelo es: μ^1, $\mu^1 = \{(1,(2,2)),(2,(1,1)),(3,(3,3)),(4,(4,4))\}$, $\mu^1 \in \mathcal{S}(A^2, \succ_{A^2})$, con $\#_h(\mu^1) = 1$ por lo tanto $M_1(A^2, \succ_{A^2}) = \{\mu^1\}$.

Para $((A^3, \succ_{A^3}), \succ_E^*, 1)$: Las posibles pre-asignaciones ordenadas en este modelo son: μ^1, μ^2 y μ^3, $\mu^2 = \{(1,(3,3)),(2,(2,2)),(3,(1,1)),(4,(4,4))\}$;
$\mu^3 = \{(1,(1,1)),(2,(3,3)),(3,(2,2)),(4,(4,4))\}$.

En este modelo μ^1 y μ^2 no son estables, ya que se encuentran bloqueadas por el par $\{2,3\}$. En cambio μ^3 es estable, $\mu^3 \in \mathcal{S}(A^3, \succ_{A^3})$, con $\#_h(\mu^3) = 1$, entonces $M_1(A^3, \succ_{A^3}) = \{\mu^3\}$.

Para $((A^4, \succ_{A^4}), \succ_E^*, 1)$: Las posibles pre-asignaciones ordenadas en este modelo son μ^1, μ^2, μ^3, pero no son estables ya que se encuentran bloqueadas por $\{2,3\}$, $\{2,3\}$ y $\{3,4\}$, respectivamente. Luego $M_1(A^4, \succ_{A^4}) = \emptyset$.

Mostremos ahora que toda pre-asignación estable de $M_q(A, \succ_A)$ es $q-$estable en el modelo $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$.

Teorema 10 $M_q(A, \succ_A) \subseteq \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$.

Hasta ahora hemos analizado el conjunto $M_q(A^i, \succ_{A^i})$ constituido por los estables del modelo $(A^i, \succ_{A^i})$ con cantidad de espacios asignados exactamente igual a q, vamos a considerar ahora la posibilidad de tener un número menor a q.

Dado un modelo $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$, para cada $i \in N$ definimos el conjunto $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$ de todos las pre-asignaciones estables del modelo $(A^i, \succ_{A^i})$ que tienen número de espacios menor a la cuota fijada y donde los agentes solos no son mutuamente aceptables.

Formalmente:

$$M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) = \{\mu \in \mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i}) : \#_h(\mu) < q, \text{ y } \forall x, y \in A,\ x, y \notin m(\mu),\ x \succ_x y \ \text{ e } \ y \succ_y x\}.$$

Es claro de la definición anterior que $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \subseteq \mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i})$.

Por el Corolario 6, el conjunto de ciclos impares, y por lo tanto de agentes solos, es el mismo para toda pre-asignación estable de un mismo modelo. Esto nos permitió demostrar que dos pre-asignaciones estables de un mismo modelo tienen igual cardinalidad (Teorema 7). Esto implica que si existe una pre-asignación estable en el modelo $(A^i, \succ_{A^i})$ con cardinalidad

$< q$, entonces todas las pre-asignaciones estables de este modelo tienen esa característica. Es decir:

$$M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) = \begin{cases} \mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i}) \\ \text{o} \\ \emptyset \end{cases}$$

A partir de estos conjuntos podemos definir un nuevo conjunto:

$$M_{<q}(A, \succ_A) = \bigcup_{i \in N} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}).$$

Teorema 11 *Si* $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ *es un modelo de asignación generalizado con restricción de cuota, entonces* $M_{<q}(A, \succ_A) \subseteq \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$.

Los resultados obtenidos en las secciones anteriores permiten dar una caracterización completa del conjunto de pre-asignaciones $q-$estables en términos de los conjuntos $M_q(A, \succ_A)$ y $M_{<q}(A, \succ_A)$.

Probemos que los $q-$estables del modelo generalizado con restricción de capacidad se pueden obtener de los $q-$estables de estos conjuntos.

Teorema 12 *Sea* $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ *un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad, entonces*

$$\mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*) = M_q(A, \succ_A) \cup M_{<q}(A, \succ_A).$$

Como podemos obtener las pre-asignaciones $q-$estables a partir de los conjuntos $M_q(A^j, \succ_{A^j})$ y $M_q(A^j, \succ_{A^j})$, se hace necesario analizar las propiedades de los mismos. Comenzamos nuestro estudio con los conjuntos $M_q(A^j, \succ_{A^j})$.

Probamos en primer término que toda pre-asignación estable de un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad, con cardinalidad igual a la cuota es una pre-asignación estable en algún modelo reducido. Para ello queremos mostrar que el conjunto $M_q(A, \succ_A)$ puede expresarse como unión disjunta de algunos conjuntos $M_q(A^k, \succ_{A^k})$.

Proposición 10 *Si* $K = \{k \in N : \forall i < k, M_q(A^k, \succ_{A^k}) \cap M_q(A^i, \succ_{A^i}) = \emptyset\}$ *entonces* $M_q(A, \succ_A) = \dot{\bigcup\limits_{k \in K}} M_q(A^k, \succ_{A^k})$.

Para poder demostrar esta proposición necesitamos desarrollar algunos lemas.

En primer lugar probemos que toda pre-asignación $q-$estable en un modelo reducido $(A^i, \succ_{A^i})$ es también una pre-asignación $q-$estable en el modelo reducido $(A^j, \succ_{A^j})$ siempre que $j \leq i$ y los agentes que no son solos pertenezcan a A^j. Formalmente:

Lema 3 *Si* $\mu \in M_q(A^i, \succ_{A^i})$ *con* $i \in N$ *entonces, para todo* $j \leq i$ *tal que* $m(\mu) \subseteq A^j$*, se verifica* $\mu \in M_q(A^j, \succ_{A^j})$.

En segundo lugar probemos que dos conjuntos cualesquiera de la forma $M_q(A^i, \succ_{A^i})$, $i \in N$ o están incluidos uno en el otro o son disjuntos.

Lema 4 *Si $i, j \in N$ son tales que $j \leq i$ entonces se verifica una de las siguientes condiciones:*
(i) $M_q(A^i, \succ_{A^i}) \subseteq M_q(A^j, \succ_{A^j})$, o
(ii) $M_q(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_q(A^j, \succ_{A^j}) = \emptyset$.

Ahora estamos en condiciones de mostrar la caracterización del conjunto $M_q(A, \succ_A)$ como unión disjunta.

Probemos ahora que toda pre-asignación $q-$estable de un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad, con cardinalidad $= q$, es estable en un modelo reducido.

Lema 5 *Si $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ es un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad, $\mu \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$ y $\#_h(\mu) = q$, entonces existe $i \in N$, tal que $\mu \in M_q(A^i, \succ_{A^i})$.*

Nuestro objetivo ahora es caracterizar las pre-asignaciones $q-$estables con cardinalidad estrictamente menor que q, para ello queremos mostrar que el conjunto $M_{<q}(A, \succ_A)$ puede expresarse como unión disjunta de algunos conjuntos $M_{<q}(A^k, \succ_{A^k})$.

Proposición 11 *Si $\widehat{K} = \{i \in N : \forall\, j < i,\ M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_{<q}(A^j, \succ_{A^j}) = \emptyset\}$, entonces*

$$M_{<q}(A, \succ_A) = \dot{\bigcup_{i \in \widehat{K}}} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$$

Para demostrar esta proposición necesitamos desarrollar algunos lemas.

En primer lugar probemos que toda pre-asignación estable en un modelo reducido $(A^i, \succ_{A^i})$ es también una pre-asignación estable en el modelo reducido $(A^j, \succ_{A^j})$ siempre que $j < i$ y los agentes que no son solos pertenezcan a A^j.

Lema 6 *Si $\mu \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$, $i \in N$, entonces, para todo $j \leq i$ tal que $m(\mu) \subseteq A^j$ se verifica $\mu \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$.*

En segundo lugar probemos que los conjuntos $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$ o están incluidos uno en el otro, o son disjuntos.

Lema 7 *Si $i, j \in N$ son tales que $j \leq i$, entonces se verifica una de las siguientes condiciones:*

i) $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \subseteq M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$,

ii) $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_{<q}(A^j, \succ_{A^j}) = \emptyset$.

6.4. Invariancia

Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado. Vamos a mostrar que las pre-asignaciones $q-$estables no dependen de la extensión responsive que se defina a partir de las preferencias individuales de la empresa.

Proposición 12 *Sea $\succ_E$ la preferencia individual de la empresa E sobre los agentes de A, sean $\succ_E^*$ y $\succ_E^{**}$ dos extensiones responsive respecto a las preferencias individuales y $((A, \succ_A), q, \succ_E^*)$ y $((A, \succ_A), q, \succ_E^{**})$ los respectivos modelos generalizados con restricción de cuota, entonces*

$$\mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^*) = \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^{**}).$$

Conclusiones

Hemos estudiado en este trabajo las pre-asignaciones $q-$estables de un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad. Hemos demostrado la existencia de las pre-asignaciones $q-$estables cuando se consideran extensiones responsive de la empresa que establece la cuota q y las hemos caracterizado en relación a su cardinalidad, igual o menor que la cuota establecida.

Hemos desarrollado estos resultados considerando que el problema del matrimonio es un caso particular del problema de asignación generalizado.

Para el modelo de asignación uno a uno *Roth y Vande-Vate* (1990) demostraron que partiendo de una asignación que no es estable, siempre podemos encontrar un camino mediante el cual, satisfaciendo pares bloqueantes se puede obtener una asignación estable, con probabilidad uno. Estos pares son escogidos de tal forma que el compañero de uno de los agentes es el preferido por sobre todos los que con él forman un par bloqueante.

Marí (2011) trabajando en el modelo de asignación uno a uno con restricción de capacidad, propone un procedimiento para partir de una asignación arbitraria y hallar una nueva asignación $q-$estable. Si en la primera aplicación del algoritmo, la asignación obtenida no es estable en el modelo, aplica el Algoritmo de Roth-Vande Vate y encuentra otra asignación, si su cardinalidad es menor o igual a q, el proceso termina. En caso contrario realiza lo que denomina una q-truncación a la última asignación, si esta truncación es estable, se está ante la asignación buscada. Si no es estable, aplica el algoritmo de Roth-Vande Vate y vuelve a repetir el proceso anterior, que debe concluir eventualmente pues el conjunto de agentes que se considera es finito y en cada paso, menor. Finalmente prueba que partiendo de una asignación arbitraria existe una sucesión finita de asignaciones, obtenidas por el algoritmo anterior que convergen a una asignación $q-$estable.

Esta es una afirmación que debería cuestionarse en el modelo generalizado con restricción de capacidad y de ser válida, plantear el diseño de un algoritmo que extienda el de *Marí* al caso más general de pre-asignaciones $q-$estables.

Huang (2006) identificó una condición necesaria por la cual ningún agente puede permutar su lista de preferencias para conseguir un compañero con un ranking superior a cualquier compañero estable cuando todos son honestos. Generaliza este resultado a una coalición donde los agentes no pueden confabularse para conseguir estrictamente mejores compañeros estables que en la asignación original.

Sería interesante analizar si estas condiciones nos permiten asegurar resultados equivalentes para pre-asignaciones $q-$estables.

Iwama, Miyazaki y Okamoto (2007) extendieron el modelo de compañeros de cuarto considerando habitaciones para tres personas y mostraron que el problema es NP-completo[11].

La posibilidad de contar con ciclos impares en las pre-asignaciones $q-$estables parece hacer viable la extensión del modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad al modelo planteado por estos autores, esto puede ser objeto de futuras investigaciones.

Biró (2007) analizó las propiedades de la solución obtenida por el algoritmo incremental de Tan y Hsueh (1993) y estudió el problema de encontrar una asignación casi estable con el menor número de pares bloqueantes.

Es razonable considerar además, en el modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad, el método desarrollado por Biró analizando la posibilidad de obtener pre-asignaciones casi $q-$estables con el menor número de pares bloqueantes en una investigación futura.

Anexo I

Demostración Proposición 1. i) $\Rightarrow$ ii) Sea μ una pre-asignación ordenada y $B_\mu = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ un ciclo de longitud r. Debemos probar que $B_\mu = \big(\mu_2^{r-i+1}(a_i), \cdots, \mu_2^{r-1}(a_i), a_i, \mu_2(a_i), \cdots, \mu$

Si $r = 1$ la demostración es trivial. $B_\mu = (a_1)$, por definición de ciclo $\mu(a_1) = (a_1, a_1)$, luego $\mu_2(a_1) = a_1$. Entonces $\mu_2^2(a_1) = \mu_2(\mu_2(a_1)) = \mu_2(a_1) = a_1$ y en general $\mu_2^k(a_1) = a_1$, para todo $k = 1, \cdots, r-1$.

Si $r = 2$ la demostración es inmediata. Por definición de ciclo $\mu(a_1) = (a_2, a_2)$ y $\mu(a_2) = (a_1, a_1)$. Luego $\mu_2(a_1) = a_2$, $\mu_2^2(a_1) = \mu_2(\mu_2(a_1)) = \mu_2(a_2) = a_1$, $\mu_2^3(a_1) = \mu_2(\mu_2^2(a_1)) = \mu_2(a_1) = a_2$. En general $\mu_2^k(a_1) = a_1$ si k es par y $\mu_2^k(a_1) = a_2$ si k es impar.

Supongamos $r \geq 3$. Por definición de ciclo $\mu_2(a_i) = a_{i+1}$ para $1 \leq i < r$ y $\mu_2(a_r) = a_1$. Como μ_2 es función, entonces $\mu_2^2(a_i) = \mu_2(\mu_2(a_i)) = \mu_2(a_{i+1}) = a_{i+2}$, $1 \leq i > r$. $\mu_2^3(a_i) = \mu_2(\mu_2^2(a_i)) = \mu_2(a_{i+2}) = a_{i+3}$, $1 \leq i > r$. En general $\mu_2^k(a_i) = a_{i+k}$ para $k = 1, \cdots, r-1$. Entonces $\mu_2^{r-i}(a_i) = a_{i+(r-i)} = a_r$ y $\mu_2^{r-i+1}(a_i) = \mu_2(\mu_2^{r-i}(a_i)) = \mu_2(a_r) = a_1$. Por otra parte $\mu_2^{r-1}(a_1) = a_{1+r-1} = a_r$, $\mu_2^{r-1}(a_2) = \mu_2(\mu_2^{r-2}(a_2) = \mu_2(a_{2+r-2}) = \mu_2(a_r) = a_1$, $\mu_2^{r-1}(a_3) = \mu_2^2(\mu_2^{r-3}(a_3)) = \mu_2^2(a_{3+r-3}) = \mu_2^2(a_r) = \mu_2(a_1) = a_2$. Reiterando este proceso podemos concluir que $\mu_2^{r-1}(a_i) = a_{i-1}$ para $1 < i < r$. Por lo tanto $B_\mu = (a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_r) = \big(\mu_2^{r-i+1}(a_i), \cdots, \mu_2^{r-1}(a_i), a_i, \mu_2(a_i), \cdots, \mu_2^{r-i}(a_i)\big)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea μ una pre-asignación ordenada y $B_\mu = (a_1, a_2, \cdots, a_r) = \big(\mu_2^{r-i+1}(a_i), \cdots,$ $\mu_2^{r-1}(a_i), a_i, \mu_2(a_i), \cdots, \mu_2^{r-i}(a_i)\big)$. Debemos probar que $B_\mu = \big(\mu_1^{i-1}(a_i), \cdots, \mu_1(a_i), a_i,$

[11] En teoría de la complejidad computacional se define: La clase general de preguntas para las cuales algún algoritmo puede proveer una respuesta en tiempo polinomial es llamada clase P o sólo P. La clase de preguntas para las cuales una respuesta puede ser verificada en tiempo polinomial es llamada NP. Un problema de decisión C se denomina NP-completo si C es un problema NP y todo problema de NP se puede transformar polinómicamente en C.

$\mu_1^{r-1}(a_i), \cdots, \mu_1^i(a_i)\big), a_i \in B_\mu$.

Si $r=1$, la demostración es trivial, $\mu_1(a_1)=a_1=\mu_2^k(a_1)$. Luego $\mu_1^p(a_1)=\mu_2^{k+p}(a_1)=a_1$.

Si $r=2$, la demostración es inmediata, $B_\mu=(a_1,\mu_2^{2-1}(a_1))=(\mu_2^{2-1}(a_2),a_2)$, luego $\mu_1(a_2)=a_1=\mu_2(a_2)$, $\mu_1^2(a_2)=\mu_1(a_1)=a_2$. Por lo tanto $\mu_1^{2-1}(a_1)=a_2$ y $\mu_1^1(a_1)=\mu_1^i(a_1)=a_2$.

Supongamos $r\geq 3$. Sea $\mu_1: A\to A$ tal que $\mu_1(a_i)=a_{i-1}$ para $1<i\leq r$ y probemos que B_μ tiene la forma enunciada. Entonces $\mu_1(a_i)=a_{i-1}=\mu_2^{r-1}(a_i)$. Como μ_1 es función, entonces $\mu_1^2(a_1)=\mu_1(\mu_1(a_1))=\mu_1(\mu_2^{r-1}(a_1))=\mu_1(a_r)=a_{r-1}$. Análogamente $\mu_1^2(a_2)=\mu_1(\mu_2^{r-1}(a_2))=\mu_1(a_1)=a_r$, $\mu_1^2(a_3)=\mu_1(\mu_2^{r-1}(a_3))=\mu_1(a_2)=a_1$. Entonces $\mu_1^2(a_i)=a_{i-2}$. Aplicando nuevamente μ_1, obtenemos: $\mu_1^3(a_1)=\mu_1(\mu_1^2(a_1))=\mu_1(a_{r-1})=a_{r-2}$, $\mu_1^3(a_2)=\mu_1(\mu_1^2(a_2))=\mu_1(a_r)=a_{r-1}$, $\mu_1^3(a_3)=\mu_1(a_1)=a_r$, $\mu_1^3(a_4)=\mu_1(a_2)=a_1$. Entonces $\mu_1^3(a_i)=a_{i-3}$. En general $\mu_1^k(a_i)=\begin{cases} a_{i-k} \text{ para } i>k, \\ a_{r-(k-i)} \text{ para } i\leq k. \end{cases}$. Entonces como $i-1<i$, $\mu_1^{i-1}(a_i)=a_{i-(i-1)}=a_1$. Además $i\leq r-1$, $\mu_1^{r-1}(a_i)=a_{r-(r-1-i)}=a_{r-r+1+i}=a_{i+1}$ y $\mu_1^i(a_i)=a_{r-(i-i)}=a_r$. Por lo tanto $B_\mu=\big(\mu_1^{i-1}(a_i),\cdots,\mu_1(a_i),a_i,\mu_1^{r-1}(a_i),\cdots,\mu_1^i(a_i)\big), a_i\in B_\mu$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Supongamos $B_\mu=\big(\mu_1^{i-1}(a_i),\cdots,\mu_1(a_i),a_i,\mu_1^{r-1}(a_i),\cdots,\mu_1^i(a_i)\big)$. Sean $a,b\in B_\mu$ tales que $\mu_1(a)=b$. Debemos probar que $\mu_2(b)=a$. Como μ_2 es una función entonces $\mu_2(\mu_1(a))=\mu_2(b)$. a es de la forma $a=\mu_1^k(a_i)=\begin{cases} a_{i-k} \text{ para } i>k \\ a_{r-(k-i)} \text{ para } i\leq k \end{cases}$. Luego $\mu_1(a)=\mu_1(\mu_1^k(a_i))=\mu_1^{k+1}(a_i)=a_{i-(k+1)}$ para $i>(k+1)$, entonces $\mu_2(\mu_1(a))=\mu_2(a_{i-(k+1)})=a_{i-k-1+1}=a_{i-k}$ para $i>k$ y $\mu_1(a)=\mu_1(\mu_1^k(a_i))=\mu_1^{k+1}(a_i)=a_{r-(k+1-i)}$ para $i\leq k$ entonces $\mu_2(\mu_1(a))=\mu_2(a_{r-(k+1-i)})=a_{r-k-1+i+1}=a_{r-(k-i)}$ para $i\leq k$. Luego $\mu_2(b)=a$. En forma análoga se demuestra que si $\mu_2(b)=a$ entonces $\mu_1(a)=b$.

iv) $\Rightarrow$ i) Sea μ una pre-asignación del modelo $(A,\succ_A)$ y $B_\mu=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ un conjunto ordenado de r elementos de A. Supongamos que los elementos de B_μ verifican la condición (iv) y probemos que B_μ es un ciclo. Debemos probar que

$$\text{i) si } r\geq 3, \quad \mu(x)=\begin{cases} (a_r,a_2) & \text{para} \quad x=a_1 \\ (a_{i-1},a_{i+1}) & \text{para} \quad x=a_i,\ 1<i<r \\ (a_{r-1},a_1) & \text{para} \quad x=a_r \end{cases}$$

$$\text{ii) si } r=2, \quad \mu(x)=\begin{cases} (a_2,a_2) & \text{para} \quad x=a_1 \\ (a_1,a_1) & \text{para} \quad x=a_2 \end{cases}$$

$$\text{iii) si } r=1, \quad \mu(x)=(x,x)$$

Consideremos los siguientes casos teniendo en cuenta la cantidad r de elementos de B_μ.

a) El caso $r=1$ es trivial.

b) Supongamos que $r=2$. Si $a_1,a_2\in B_\mu$, por (iv), si $\mu_1(a_1)=a_2$ entonces $\mu_2(a_2)=a_1$ (1) $\mu_1(a_2)$ puede ser a_1 o a_2. Si $\mu_1(a_2)=a_1$ entonces, por (iv), $\mu_2(a_1)=a_2$ con lo que podemos concluir que $\{a_1,a_2\}$ constituye una pareja, es decir, B_μ es un ciclo de longitud 2. Si $\mu_1(a_2)=a_2$, entonces, por (iv), $\mu_2(a_2)=a_2$, pero esto, por (1), contradice que μ_2 es función.

c) Supongamos que $r \geq 3$. Sabemos que, por (iv), $\mu_1(a_i) = a_j$ para algún $i, j \in \{1, 2, \cdots, r\}$ si y sólo si $\mu_2(a_j) = a_i$. Para poder analizar todas las posibilidades del concepto de ciclo, consideremos las imágenes de los agentes de A por la función μ_2, en forma ordenada. Para que B_μ sea un ciclo, dado $a_1 \in B_\mu$, debemos probar que $\mu_1(a_1) = a_r$ y $\mu_2(a_1) = a_2$. Es evidente que $\mu_2(a_2) \neq a_1$ pues en ese caso estaríamos en presencia de un ciclo $\{a_1, a_2\}$ de longitud $r = 2$. Sea $\mu_2(a_1) = a_2$ entonces, por (iv), $\mu_1(a_2) = a_1$. (2) Tenemos entonces $a_1, a_2 \in B_\mu$ tales que $\mu_2(a_1) = a_2$ y $\mu_1(a_2) = a_1$. Para que estos agentes formen parte de un ciclo de longitud $r \geq 3$ debe existir $a_3 \in B_\mu$ tal que $\mu_2(a_2) = a_3$. Por (iv), $\mu_1(a_3) = a_2$. (3) Entonces $a_1, a_2, a_3 \in B_\mu$ verifican: $\mu_2(a_1) = a_2$, $\mu_1(a_2) = a_1$, $\mu_2(a_2) = a_3$ y $\mu_1(a_3) = a_2$. Puede ocurrir que $\mu_2(a_3)$ sea alguno de los agentes a_1, a_2 o se requiera considerar un nuevo agente a_4. Es claro que $\mu_2(a_3) = a_2$ no puede suceder pues por (iv) sería $\mu_1(a_2) = a_3$, pero esto, por (2), contradice que μ_1 es función. Por lo tanto $\mu_2(a_3) \neq a_2$. Luego, si $\mu_2(a_3) = a_1$ entonces, por (iv), $\mu_1(a_1) = a_3$ con lo que se determina el ciclo $\{a_1, a_2, a_3\}$ de longitud 3. Si $\mu_2(a_3) = a_4$, entonces, por (iv), $\mu_1(a_4) = a_3$. En consecuencia $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ verifican $\mu_2(a_1) = a_2$, $\mu_1(a_2) = a_1$, $\mu_2(a_2) = a_3$, $\mu_1(a_3) = a_2$, $\mu_2(a_3) = a_4$ y $\mu_1(a_4) = a_3$. Luego debemos considerar las posibles imágenes de a_4 por la función μ_2. Suponer que $\mu_2(a_4) = a_2$ o $\mu_2(a_4) = a_3$ nos lleva a contradecir que μ_1 es una función, por (2) y (3). Entonces puede ocurrir que la imagen de a_4 por μ_2 sea a_1 o que sea necesario considerar un nuevo agente $a_5 \in B_\mu$. Si $\mu_2(a_4) = a_1$ entonces $\mu_1(a_1) = a_4$ y $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ forman un ciclo de longitud 4. Si $\mu_2(a_4) = a_5$ entonces $\mu_1(a_5) = a_4$. Reiterando las consideraciones anteriores podemos afirmar que $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ forman un ciclo de longitud 5 o que existe $a_6 \in B_\mu$ tal que $\mu_2(a_5) = a_6$. El proceso continúna obteniendo ciclos de longitud par o impar hasta considerar todos los r agentes de B_μ. □

Demostración Proposición 2. Sean $B_\mu = (a_1, a_2, \cdots, a_w)$ y $C_\mu = (b_1, b_2, \cdots, b_s)$ dos ciclos de longitud w y s. Por proposición 1, podemos escribir a los ciclos B_μ y C_μ de la siguiente manera:
$B_\mu = (\mu_2^{w-l+1}(a_l), \mu_2^{w-l+2}(a_l), \cdots, a_l, \mu_2(a_l), \cdots, \mu_2^{w-l}(a_l))$ y
$C_\mu = (\mu_2^{s-r+1}(b_r), \mu_2^{s-r+2}(b_r), \cdots, b_r, \mu_2(b_r), \cdots, \mu_2^{s-r}(b_r))$.
Si $B_\mu \cap C_\mu \neq \emptyset$ entonces $a_l = b_r$ para algún $l,\ 1 \leq l \leq w$ y $r,\ 1 \leq r \leq s$. Luego $\mu_2^t(a_l) = \mu_2^t(b_r)$ para todo $t \geq 1$, entonces $B_\mu = C_\mu$. □

Demostración Proposición 3. Sea μ una pre-asignación estable en $(A, \succ_A)$. Supongamos que $P_4(\mu) \neq \emptyset$ entonces existe una cadena $\overline{B}_\mu =< a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}, a_r >$ de elementos de A tal que $\mu(a_1) = (a_1, a_2), \mu(a_i) = (a_{i-1}, a_{i+1}), 1 < i < r$ y $\mu(a_r) = (a_r, a_{r-1})$. Observemos de la definición de μ y de $\overline{B}_\mu$ que: $a_{r-1} \succ_{a_r} a_r = \mu_1(a_r)$ y $a_r \succ_{a_{r-1}} a_{r-2} = \mu_1(a_{r-1})$. Luego los agentes a_r y a_{r-1} constituyen un bloqueo ya que ambos preferirían ser compañeros todo el tiempo antes que serlo por medio tiempo y ser asignados a sí mismos el otro medio tiempo. Esto contradice que μ es estable. □

Demostración Proposición 4. Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y sea $\mu : A \to A \times A$ una pre-asignación estable. Sean los conjuntos $B_\mu^i, 1 \leq i \leq k$, los k ciclos definidos por μ. Deseamos probar que estos ciclos definen una partición del conjunto A. Es decir $\{B_\mu^i\}_{1 \leq i \leq k}$ es una partición de A. Esto significa que debemos probar que los ciclos son conjuntos no vacíos, que son disjuntos dos a dos y que la unión de todos ellos da el conjunto de agentes A. La definición de ciclo nos permite asegurar que son no vacíos, es decir $B_\mu^i \neq \emptyset$, para todo $1 \leq i \leq k$. En segundo lugar debemos probar que para todo $1 \leq i, j \leq k$; $B_\mu^i \cap B_\mu^j = \emptyset$ o $B_\mu^i = B_\mu^j$ para todo $i \neq j$. La proposición 2, muestra que los ciclos son conjuntos disjuntos, ya que si existen $i_0, j_0, i_0 \neq j_0$ tales que $B_\mu^{i_0} \cap B_\mu^{j_0} \neq \emptyset$, entonces $B_\mu^{i_0} = B_\mu^{j_0}$. Probemos ahora que la unión de estos ciclos es el conjunto de agentes A, es decir, $A = \bigcup_{i=1}^{k} B_\mu^i$. Por definición de ciclo $B_\mu^i \subseteq A$ para todo $1 \leq i \leq k$ entonces, $\bigcup_{i=1}^{k} B_\mu^i \subseteq A$. Probemos que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_\mu^i$. Sea $s \in A$, como μ es una pre-asignación estable entonces por Corolario 1, existe un ciclo $B_\mu^j \subseteq A$ tal que $s \in B_\mu^j$. Luego $s \in B_\mu^j \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_\mu^i$ y por lo tanto $A \subseteq \bigcup B_\mu^i$. En consecuencia $A = \bigcup B_\mu^i$. Por lo tanto, $\{B_\mu^i\}_{1 \leq i \leq k}$ es una partición de A. □

Demostración Lema 1. ($\Rightarrow$) Sea $\mu : A \to A \times A$, tal que $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x))$, una pre-asignación ordenada y supongamos que μ está determinada por k ciclos. Dado un ciclo $B_\mu = \{a_1, \cdots, a_p\}$, probemos que B_μ es una spp. De acuerdo a la longitud p del ciclo, pueden suceder los siguientes casos:
(i) $p = 1$. Estamos ante un conjunto unitario $\{a_p\}$ que simboliza un agente que ha sido asignado a sí mismo, entonces por definición de ciclo y de μ podemos escribir $\mu(a_i) = (a_i, a_i)$. Luego B_μ es una spp de longitud 1.
(ii) $p = 2$. En este caso tenemos una pareja $B_\mu = \{a_1, a_2\}$. Por definición de ciclo $\mu(a_1) = (a_2, a_2)$ y $\mu(a_2) = (a_1, a_1)$, además a_1 está en la lista de a_2 y a_2 está en la lista de a_1 con $a_2 \succ_{a_1} a_1$ y $a_1 \succ_{a_2} a_2$, entonces por definición, B_μ es una spp de longitud 2.
(iii) $p \geq 3$. En este caso $B_\mu = \{a_1, \cdots, a_p\}$ es un ciclo de longitud mayor o igual a 3, luego $\mu(a_1) = (a_p, a_2)$, $\mu(a_i) = (a_{i-1}, a_{i+1})$ para $1 < i < p$ y $\mu(a_p) = (a_{p-1}, a_1)$, con $a_2 \succ_{a_1} a_p \succ_{a_1} a_1$, $a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1} \succ_{a_i} a_i$ para $1 < i < p$ y $a_1 \succ_{a_p} a_{p-1} \succ_{a_p} a_p$. Por definición, B_μ es una spp de longitud mayor o igual que 3. Entonces en general B_μ es una spp de longitud p.
($\Leftarrow$) Sea $\Pi(B^j)$ una spp cualesquiera del modelo de asignación generalizado, debemos definir una pre-asignación ordenada μ para la cual $\Pi(B^j)$ es un ciclo de μ. Sea $a \in A$. Consideremos los siguientes casos en función de la longitud de la spp que contiene a este agente.
(i) Si $a \in \Pi(B^j)$ y $\Pi(B^j)$ es una spp de longitud 1 entonces definimos $\mu(a) = (a, a)$. Luego $\Pi(B^j)$ es un ciclo de longitud 1.
(ii) Si $a \in \Pi(B^j)$ y $\Pi(B^j)$ es una spp de longitud 2 entonces $a = a_1$ y $a_2 \succ_a a$ y $a \succ_{a_2} a_2$ por lo que podemos definir $\mu(a_1) = (a_2, a_2)$ y $\mu(a_2) = (a_1, a_1)$. Por definición, $\Pi(B^j)$ es un ciclo de longitud 2.
(iii) Si $a \in \Pi(B^j)$ y $\Pi(B^j)$ es una spp de longitud mayor o igual que 3, entonces existe $j \in \{1, \cdots, p\}$ tal que $a = a_j$ y $a_2 \succ_{a_1} a_k$, $a_3 \succ_{a_2} a_1$, $\cdots$, $a_{i+1} \succ_{a_i} a_{i-1}$, $\cdots$, $a_k \succ_{a_{k-1}} a_{k-2}$, $a_1 \succ_{a_k} a_{k-1}$. Luego podemos definir $\mu(a_1) = (a_p, a_2)$, $\mu(a_i) = (a_{i-1}, a_{i+1})$ para $1 < i < p$, y $\mu(a_p) = (a_{p-1}, a_1)$. Entonces por definición, $\Pi(B^j)$ es un ciclo de longitud mayor o igual a 3.

Entonces para cada caso $\Pi(B^j)$ es un ciclo de μ. $\square$

Demostración Teorema 1. Sea $\mu : A \to A \times A$ una pre-asignación estable para el modelo $(A, \succ_A)$, dada por $\mu(x) = (\mu_1(x), \mu_2(x)), x \in A$. Queremos probar que μ define una partición estable Π_μ. Por corolario 1, todo agente de A pertenece a un ciclo. Supongamos que la pre-asignación estable μ está definida por k ciclos, B^j_μ. Por lema 1, todos los ciclos $B^j_\mu, 1 \leq j \leq k \leq |A|$ son spp. Además por proposición 4, los ciclos B^j_μ determinan una partición del conjunto A. Luego los spp B^j_μ son los subconjuntos de una partición de A que denominamos Π_μ. Resta demostrar que Π_μ verifica la condición de estabilidad establecida por Tan. Para ello consideremos dos agentes a_i, b_m de un spp B^j_μ de longitud p, para algún $j \in \{1, \cdots, k\}$ tales que $b_m \succ_{a_i} a_{i-1} \succ_{a_i} a_i$, con $m, i \in \{1, \cdots, p\}$. En primer lugar esto significa que b_m y a_i son mutuamente aceptables, es decir $b_m \succ_{a_i} a_i$ y $a_i \succ_{b_m} b_m$. En segundo lugar implica que para a_i, b_m es mejor opción que su peor opción en el ciclo: $\mu_1(a_i) = a_{i-1}$. Debemos demostrar que $b_{m-1} \succ_{b_m} a_i \succ_{b_m} b_m$. En general todo agente a_i de un ciclo B^j_μ de longitud $p \geq 3$ tiene por medio de μ un par de agentes como imagen, $\mu(a_i) = (a_{i-1}, a_{i+1})$, con $\mu_1(a_i) = a_{i-1}, \mu_2(a_i) = a_{i+1}$ y $\mu_2(a_i) \succ_{a_i} \mu_1(a_i)$. Como μ es estable, si existen $c, d \in A$ tales que $d \succ_c \mu_1(c)$ entonces debe ocurrir que $\mu_1(d) \succ_d c$ (caso contrario constituirían un par bloqueante). Como $b_m \in B^j_\mu$ entonces $\mu_1(b_m) = b_{m-1}$ y $\mu_2(b_m) = b_{m+1}$. Por otro lado hemos supuesto $b_m \succ_{a_i} a_{i-1}$ entonces $b_m \succ_{a_i} \mu_1(a_i)$. Luego tenemos los agentes $a_i, b_m \in B^j_\mu \subseteq A$ tal que $b_m \succ_{a_i} \mu_1(a_i)$ entonces $\mu_1(b_m) \succ_{b_m} a_i$ y por lo tanto $b_{m-1} \succ_{b_m} a_i$. Luego por la definición 7, Π_μ es una partición estable. $\square$

Demostración Teorema 7. (es inmediata del Corolario 6). Sean μ, μ' pre-asignaciones estables del modelo $(A, \succ_A)$, probemos que $\#_h(\mu) = \#_h(\mu')$. Por Corolario 6, μ y μ' tienen los mismos ciclos impares, lo que significa que $P_1(\mu) = P_1(\mu')$ y $P_3(\mu) = P_3(\mu')$. Por lo tanto $\#_h(P_3(\mu)) = \#_h(P_3(\mu'))$. Como tienen los mismos ciclos impares, los agentes en pareja son los mismos en ambas pre-asignaciones y la diferencia entre ellas radica exclusivamente en la forma en que están asignadas dichas parejas no así en su número. En consecuencia $\#_h(P_2(\mu)) = \#_h(P_2(\mu'))$. Por lo tanto, como $\#_h(\mu) = \#_h(P_2(\mu)) + \#_h(P_3(\mu))$ y $\#_h(\mu') = \#_h(P_2(\mu')) + \#_h(P_3(\mu'))$ concluimos que $\#_h(\mu) = \#_h(\mu')$. $\square$

Demostración Teorema 2. Sea $(A, \succ_A)$ un modelo de asignación generalizado y sea Π una partición estable, queremos probar que Π define una pre-asignación estable μ_Π. Sabemos que toda partición estable Π es una partición de A en un número r de spp, $\pi(B^i), i \in \{1, \cdots, r\}$, y que los elementos de cada spp $\pi(B^i)$ de cardinalidad k_i verifican, para todo $1 < m \leq k_i$; $1 < t \leq k_i$, las siguientes condiciones de estabilidad:

- Si $a^i_m \succ_{a^i_t} a^i_{t-1} \succ_{a^i_t} a^i_t$ entonces $a^i_{m-1} \succ_{a^i_m} a^i_t \succ_{a^i_m} a^i_m$.
- Si $a^i_m \succ_{a^i_1} a^i_k \succ_{a^i_1} a^i_1$ entonces $a^i_{m-1} \succ_{a^i_m} a^i_1 \succ_{a^i_m} a^i_m$.
- Si $a^i_1 \succ_{a^i_t} a^t_{t-1} \succ_{a^i_t} a^i_t$ entonces $a^i_k \succ_{a^i_1} a^i_t \succ_{a^i_1} a^i_1$.

Aplicando el lema 1, podemos afirmar que cada $\pi(B^i)$ es un ciclo para una pre-asignación ordenada μ_π. Luego la partición Π determina una partición de A en r ciclos $B^i_{\mu_\pi} = \pi(B^i)$ tales que:

a) Si $|\pi(B^i)| = k_i = 1$ entonces $\mu_\Pi(a_1) = (a_1, a_1)$.
b) Si $|\pi(B^i)| = k_i = 2$ entonces $\mu_\Pi(a_1) = (a_2, a_2)$ y $\mu_\Pi(a_2) = (a_1, a_1)$.
c) Si $|\pi(B^i)| = k_i > 2$ entonces $\mu_\Pi(a_1) = (a_{k_i}, a_2)$, $\mu_\Pi(a_j) = (a_{j-1}, a_{j+1})$, $1 < j < k_i$, y $\mu_\Pi(a_{k_i}) = (a_{k_i-1}, a_1)$.
Probemos que μ_Π es una pre-asignación estable, es decir que μ_Π no es bloqueada ni por agentes ni pares de agentes. Sean $x, y \in A$. Como Π es una partición de A, estos agentes deberán pertenecer a algún ciclo de μ_Π, no necesariamente al mismo. Si los agentes x, y pertenecen a un mismo ciclo $B^{i_0}_{\mu_\pi}$, por definición de ciclo no son agentes bloqueantes ni constituyen un par bloqueante. Supongamos que no pertenecen a un mismo ciclo. Es decir supongamos que existen i_o, j_o tales que $x \in B^{i_o}_{\mu_\Pi}$ e $y \in B^{j_o}_{\mu_\Pi}$. Sean $x = a^{i_o}_m \in B^{i_o}_{\mu_\Pi}$ e $y = a^{j_o}_w \in B^{j_o}_{\mu_\Pi}$. Supongamos además que $a^{j_o}_w \succ_{a^{i_o}_m} a^{i_o}_{m-1} \succ_{a^{i_o}_m} a^{i_o}_m$. Como Π es una partición estable verifica la siguiente condición de estabilidad: $a^{j_o}_{w-1} \succ_{a^{j_o}_w} a^{i_o}_m \succ_{a^{j_o}_w} a^{j_o}_w$. Tenemos entonces dos agentes $a^{i_o}_m$ y $a^{j_o}_w$ que son mutuamente aceptables pero que no se prefieren entre sí antes que su peor asignación en la pre-asignación μ_Π, luego no constituyen un par bloqueante para μ_Π. Por lo tanto μ_Π es una pre-asignación estable. □

Demostración Teorema 3. Es inmediato de los teoremas 1 y 2 y el teorema 6.6 de Tan (1991). □

Demostración Proposición 5. Es inmediato de los teoremas 1 y 2 y la Proposición 3.1 de Tan (1991). □

Demostración Proposición 6. Es inmediato de los teoremas 1 y 2 y el teorema 6.6 de Tan (1991). □

Demostración Teorema 4. Es inmediato de los teoremas 1 y 2 y el teorema 6.7 de Tan (1991). □

Demostración Proposición 7. Sean μ y μ' pre-asignaciones estables de $(A, \succ_A)$ y $(A \cup \{x\}, \succ_{A\cup\{x\}})$, respectivamente. Sabemos que una pre-asignación estable μ define la familia de conjuntos unitarios, $P_1(\mu)$, la familia de agentes asignados en parejas, $P_2(\mu)$ y la familia de ciclos impares de longitud mayor o igual a 3, $P_3(\mu)$. Otro tanto ocurre con μ'. Hemos establecido por convención que $\#_h(P_1(\mu)) = 0 = \#_h(P_1(\mu'))$ y que $\#_h(\mu) = \#_h(P_2(\mu)) + \#_h(P_3(\mu))$. En forma análoga: $\#_h(\mu') = \#_h(P_2(\mu')) + \#_h(P_3(\mu'))$. Por Teorema 8, agregando el agente x, el número de ciclos impares en μ' se ve incrementado o decrementado en 1. Consideramos las siguientes dos posibilidades:
Caso 1) El número de ciclos impares se incrementa en 1, es decir $|P_1(\mu')| + |P_3(\mu')| = |P_1(\mu)| + |P_3(\mu)| + 1$. Por teorema 8, podemos afirmar que se ha formado un nuevo ciclo impar y además que todos los ciclos impares originales continúan existiendo en el nuevo modelo. Esto quiere decir que el agente x se incorpora al conjunto de ciclos de longitud 1 o de longitud mayor o igual a 3. Se presentan a su vez los siguientes casos:
Caso (a) El número de ciclos de longitud uno se incrementa en 1. Esto significa que x se ha incorporado al conjunto de agentes pero no ha constituido pareja ni ciclo con ningún otro, es decir que ha quedado solo o asignado a sí mismo. Por lo tanto: $P_1(\mu') = P_1(\mu) \cup \{\{x\}\}$ y

entonces $|P_1(\mu')| = |P_1(\mu)|+1$. Las parejas asignadas y los ciclos de longitud mayor que 1 no han sido modificados, es decir $P_2(\mu) = P_2(\mu')$, $P_3(\mu) = P_3(\mu')$. Por lo tanto $\#_h(\mu) = \#_h(\mu')$.
Caso (b) El número de ciclos impares de longitud mayor o igual a 3 se ha incrementado en 1. Es decir $|P_3(\mu')| = |P_3(\mu)|+1$. Para que se forme un nuevo ciclo de esta longitud el agente x debe haberse incorporado en las listas de preferencias de los agentes z, w, que anteriormente constituían una pareja, y ha formado con ellos el ciclo (z, w, x). Esto significa que al agregarse x se ha eliminado una pareja y se ha aumentado un ciclo, con lo que se modifican las familias $P_2(\mu')$ y $P_3(\mu')$. $P_2(\mu')$ ya no tiene la pareja $\{z, w\}$ y en $P_3(\mu')$ se agregó el conjunto $\{z, w, x\}$. Es decir, $P_2(\mu') = P_2(\mu)\setminus\{\{z, w\}\}$ y $P_3(\mu') = P_3(\mu)\cup\{\{z, w, x\}\}$. En consecuencia $\#_h(\mu') = \#_h(P_2(\mu')) + \#_h(P_3(\mu')) = \#_h(P_2(\mu)) - 1 + \#_h(P_3(\mu)) + \frac{3}{2} = \#_h(P_2(\mu)) + \#_h(P_3(\mu)) + \frac{1}{2} = \#_h(\mu) + \frac{1}{2} \leq \#_h(\mu) + 1$.
Caso 2) El número de ciclos impares de longitud mayor o igual a 3 ha disminuido en 1, es decir $|P_1(\mu')| + |P_3(\mu')| = |P_1(\mu)| + |P_3(\mu)| - 1$. Entonces, por teorema 8, uno de los ciclos impares existentes ha sido eliminado, y el resto de los ciclos impares continúan igual en el nuevo modelo. Se presentan ahora los siguientes casos:
Caso (i) El agente x se asigna a otro agente y que antes estaba solo, es decir $|P_1(\mu')| = |P_1(\mu)|-1$. Luego el número de agentes solos disminuye en 1 y se ha agregado la pareja $\{x, y\}$ en la pre-asignación, es decir $P_2(\mu') = P_2(\mu)\cup\{\{x, y\}\}$, y $\#_h (P_2(\mu')) = \#_h (P_2(\mu))+1$. Como los agentes solos no tienen espacio asignado y los ciclos de longitud impar mayor o igual a 3 no se han modificado, la variación en $\#_h(\mu')$ radica en el número de espacios otorgados a las parejas en $P_2(\mu')$. Entonces $\#_h(\mu') = \#_h(\mu) + 1$.
Caso (ii) El número de ciclos impares de longitud mayor o igual a 3 disminuye en 1. Es decir $|P_3(\mu')| = |P_3(\mu)| - 1$. Esto implica que el agente ingresado x ha sido asignado a un agente y, que previamente pertenecía al ciclo $B_\mu = (c_1, \cdots, c_{i-1}, c_i = y, c_{i+1}, \cdots, c_r)$ de longitud r. Esto nos plantea dos posibilidades:
Caso (I) El ciclo se ha separado entonces en $\frac{r-1}{2}$ parejas. Por lo tanto $P_2(\mu') = P_2(\mu) \cup \{\{c_1, c_2\}, \cdots, \{c_{i-2}, c_{i-1}\}, \{x, y\}, \{c_{i+1}, c_{i+2}\}, \cdots, \{c_{r-1}, c_r\}\} = P_2(\mu)\cup\{\{x, y\}\}\cup\{\{c_j, c_{j+1}\} : 1 \leq j \leq r, j \neq i\}$. Con lo que concluimos que el número de espacios para parejas se ha incrementado, es decir $\#_h (P_2(\mu')) = \#_h (P_2(\mu))+\#_h (\{\{c_1, c_2\}, \cdots, \{c_{i-2}, c_{i-1}\}, \{x, y\}, \{c_{i+1}, c_{i+2}\}, \cdots, \{c_{r-1}, c_r\}\})$. El número de espacios de $\{\{c_1, c_2\}, \cdots, \{c_{i-2}, c_{i-1}\}, \{x, y\}, \{c_{i+1}, c_{i+2}\}, \cdots, \{c_{r-1}, c_r\}\}$ podemos calcularlo en función de los asignados al ciclo B_μ, más $\frac{1}{2}$. Obviamente el número de espacios para los ciclos impares resultantes lo obtenemos restando el número de espacios asignados a B_μ, es decir: $\#_h (P_3(\mu')) = \#_h (P_3(\mu))-\#_h (B_\mu) = \#_h (P_3(\mu))-\frac{|B_\mu|}{2}$.
Esto significa que $\#_h(\mu') = \#_h (P_2(\mu'))+\#_h (P_3(\mu')) = \#_h (P_2(\mu))+\frac{|B_\mu|}{2}+\frac{1}{2}+\#_h (P_3(\mu))-\frac{|B_\mu|}{2} = \#_h(\mu) + \frac{1}{2} \leq \#_h(\mu) + 1$. Entonces $\#_h(\mu') \leq \#_h(\mu) + 1$.
Caso (II) Si $|B_\mu| > 3$, formamos la pareja $\{x, y\}$ y modificamos las asignaciones de los compañeros de y en el ciclo de tal manera que generemos la cadena:
$\overline{B}_{\mu'} =< c_{i+1}, \cdots, c_{r-1}, c_r, c_1, c_2, \cdots, c_{i-1} >$, donde $\mu'(c_{i+1}) = (c_{i+1}, c_{i+2})$; $\mu'(c_j) = (c_{j+1}, c_{j-1})$,

$2 \leq j \leq r-1, j \neq i, i+1, i-1$; $\mu'(c_r) = (c_1, c_{r-1})$; $\mu'(c_1) = (c_2, c_r)$ y $\mu'(c_{i-1}) = (c_{i-1}, c_{i-2})$. Por lo tanto $P_4(\mu') = P_4(\mu) \cup \{\overline{B}_{\mu'}\} = \emptyset \cup \{\overline{B}_{\mu'}\}$. Como $P_4(\mu') \neq \emptyset$ podemos asegurar que la pre-asignación $\mu' = \mu_{\{x,y\}}$ ya no es estable. Además $\#_h(P_4(\mu')) = \#_h(P_4(\mu)) + \#_h(\overline{B}_{\mu'}) = 0 + \dfrac{|\overline{B}_{\mu'}| - 1}{2}$. Por otra parte, el agente y pertenecía al ciclo B_μ y no pertenece a la cadena, entonces $|\overline{B}_{\mu'}| = |B_\mu| - 1$. Obtenemos el número de espacios para los ciclos impares resultantes restando el número asignado a B_μ, es decir: $\#_h(P_3(\mu')) = \#_h(P_3(\mu)) - \#_h(B_\mu) = \#_h(P_3(\mu)) - \dfrac{|B_\mu|}{2}$. El número de espacios para parejas se ha incrementado, es decir $\#_h(P_2(\mu')) = \#_h(P_2(\mu)) + \#_h(\{x,y\}) = \#_h(P_2(\mu)) + 1$. Entonces $\#_h(\mu') = \#_h(P_2(\mu')) + \#_h(P_3(\mu')) + \#_h(P_4(\mu'))$, $\#_h(\mu') = \#_h(P_2(\mu)) + 1 + \#_h(P_3(\mu)) - \dfrac{|B_\mu|}{2} + \#_h(P_4(\mu)) + \dfrac{|\overline{B}_{\mu'}| - 1}{2} = \#_h(P_2(\mu)) + \#_h(P_3(\mu)) + 0 + 1 - \dfrac{|B_\mu|}{2} + \dfrac{|B_\mu| - 1 - 1}{2} = \#_h(\mu) + 1 - \dfrac{|B_\mu|}{2} + \dfrac{|B_\mu|}{2} - 1 = \#_h(\mu)$. Por lo tanto $\#_h(\mu') = \#_h(\mu)$. De todos los casos expuestos podemos concluir $\#_h(\mu) \leq \#_h(\mu') \leq \#_h(\mu) + 1$. $\square$

Demostración Proposición 8. Sea una pre-asignación estable $\mu \in \mathcal{S}(A, \succ_A)$, aceptable para E. Como es estable no tiene bloqueos en $(A, \succ_A)$ y como es aceptable para E verifica $\#_h(\mu) \leq q$ y $\mu P_E \mu^\emptyset$. Supongamos que μ no es estable en $((A, \succ_A), P_E, q)$. Suponer que μ no es $q-$estable, por definición equivale a afirmar que existe un par $\{x, y\}$ que $q-$bloquea a μ, es decir que verifica los siguientes casos:

(a) los agentes están asignados con otros agentes y se prefieren entre sí: $x, y \in m(\mu)$, $y \succ_x \mu_1(x)$ y $x \succ_y \mu_1(y)$,

(b) sólo uno de ellos está asignado a otro agente y se prefieren entre sí. Supongamos que x tiene un compañero e y está solo. Entonces $\mu_1(y) = \mu_2(y) = y$, $y \succ_x \mu_1(x)$, $x \succ_y \mu_1(y)$, y además $\mu_{\{x,y\}} P_E\, \mu$ con $\#_h(\mu_{\{x,y\}}) \leq q$.

En ambos casos podemos afirmar que $y \succ_x \mu_1(x)$ e $x \succ_y \mu_1(y)$. Luego, por definición 7, $\{x, y\}$ es un bloqueo para μ, lo que contradice la estabilidad de μ en el modelo $(A, \succ_A)$. Por lo tanto μ es $q-$estable.

$\square$

Demostración Lema 2. Supongamos que μ restringida al modelo reducido es estable, que tiene asignado un número de espacios menor que la cuota q y que los agentes que quedaron asignados a sí mismos no son mutuamente aceptables. Es decir $\mu \in \mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i})$, $\#_h(\mu) < q$ y todo par de agentes $x, y \in A$ tales que $\mu(x) = (x, x), \mu(y) = (y, y)$, no son mutuamente aceptables. Probemos que $\mu \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$. Supongamos que $\mu \notin \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$. Si μ no es $q-$estable, existe un par $q-$bloqueante $\{z, w\}$, tal que $z \succ_w \mu_1(w)$ y $w \succ_z \mu_1(z)$. Es claro que estos agentes son mutuamente aceptables, esto implica que alguno de ellos está asignado a sí mismo, ya que en caso contrario se contradice una de las hipótesis. Es decir $z \notin m(\mu)$ o $w \notin m(\mu)$. Supongamos que $z \in m(\mu)$. Esto significa que z está asignado con otro agente en el modelo reducido, lo que nos lleva a asegurar que $z \in A^i$. Consideremos dos casos:

(1) $w \in A^i$. Si esto se verifica μ asigna a los agentes z y w con otros agentes en A^i, pero esto significa que el par $\{z, w\}$ es un par bloqueante de μ en el modelo $(A^i, \succ_{A^i})$. Esto contradice la hipótesis de la estabilidad de μ en este modelo.
(2) $w \notin A^i$. Podemos entonces definir la pre-asignación ordenada $\mu_{\{z,w\}}$, asignando entre sí estos agentes. Pero, teniendo en cuenta la definición de A^i, las extensiones responsive $\succ_E^*$ definidas a partir de $\succ_E$ y aplicando la definición, podemos concluir que $\mu \succ_E^* \mu_{\{z,w\}}$. Esto contradice que $\{z, w\}$ es un par $q-$bloqueante para μ en $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$. Luego $\mu \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$.

□

Demostración Teorema 9. Sea $((A, t), \succ_E^*, q)$ un modelo de asignación generalizado con restricción de cuota q y $\succ_E^*$ las preferencias responsive de la empresa E. Debemos probar $\mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*) \neq \emptyset$. Consideremos una pre-asignación estable $\mu \in \mathcal{S}(A, \succ_A)$ y analicemos las siguientes posibilidades.
i) Si $\#_h(\mu) = q$, como hemos supuesto que $\mu \succ_E^* \mu^{\emptyset}$, entonces por la proposición 8, $\mu \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$ con lo cual queda demostrado el teorema.
ii) Supongamos $\#_h(\mu) \neq q$, luego puede ocurrir:
(a) $\#_h(\mu) < q$. Por definición de $m(\mu)$ se verifica que $m(\mu) \subseteq A$, luego podemos considerar $j \in N$ el mínimo supraíndice tal que $m(\mu) \subseteq A^j \subseteq A$. Probemos que μ es estable en este modelo reducido, es decir $\mu \in \mathcal{S}(A^j, \succ_{A^j})$. Supongamos que μ no es estable, entonces existe un par $\{x, y\} \subseteq A^j$ que bloquea a μ en dicho modelo. Como $A^j \subseteq A$, este par constituye también un bloqueo en $(A, \succ_A)$, lo que contradice la hipótesis de estabilidad de μ. Luego no existen pares que se prefieran mutuamente antes de los agentes que tienen asignados. Esto nos lleva en particular a asegurar que los agentes solos en $(A, \succ_A)$ no son mutuamente aceptables. Por lo tanto μ es una pre-asignación estable en $(A^j, \succ_{A^j})$ con $\#_h(\mu) < q$, que verifica además que los agentes solos no son mutuamente aceptables, entonces por lema 2, $\mu \in \mathcal{S}_q(A, \succ_A)$ y por lo tanto $\mathcal{S}_q(A, \succ_A) \neq \emptyset$.
(b) $\#_h(\mu) > q$. Como $\#_h(\mu) > q$, por proposición 9, existe $k \in N$ tal que para todo $\mu' \in \mathcal{S}(A^k, \succ_{A^k})$ se verifica $\#_h(\mu') = q$. Luego μ' es estable en el modelo $(A^k, \succ_{A^k})$. Por lo tanto por lema 2, $\mu' \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$. En consecuencia para cualquier valor de $\#_h(\mu)$ podemos encontrar una pre-asignación $q-$estable (μ o μ'). Es decir $\mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*) \neq \emptyset$. □

Demostración Teorema 12. Sea $((A, \succ_A), \succ_E^*, q)$ un modelo de asignación generalizado con restricción de capacidad. Sea $\mu \in M_q(A, \succ_A)$ debemos probar que $\mu \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$. Como $M_q(A, \succ_A) = \bigcup_{i \in N} M_q(A^i, \succ_{A^i})$, existe $j \in N$ tal que $\mu \in M_q(A^j, \succ_{A^j})$. Por definición de $M_q(A^j, \succ_{A^j})$ se verifica que $\mu \in \mathcal{S}(A^j, \succ_{A^j})$ y $\#_h(\mu) = q$. Supongamos que $\mu \notin \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*)$, entonces existe un par $\{x, y\}$, $q-$bloqueante para μ, que verifica una de las siguientes condiciones: $x, y \in m(\mu)$, $y \succ_x \mu_1(x)$ y $x \succ_y \mu_1(y)$, ó $y \notin m(\mu)$, $y \succ_x \mu_1(x)$, $x \succ_y y$, $\mu_{\{x,y\}} \succ_E^* \mu$ y $\#_h\left(\mu_{\{x,y\}}\right) \leq q$. Supongamos que x e y no son agentes solos en $(A^j, \succ_{A^j})$, entonces $\{x, y\} \subseteq m(\mu) \subseteq A^j \subseteq A$. En consecuencia el par $\{x, y\}$ es $q-$bloqueante para μ en el modelo $(A^j, \succ_{A^j})$. Esto contradice la estabilidad de μ en este modelo. Supongamos que y es un agente solo, entonces $y \notin m(\mu)$ y tiene sentido definir la pre-asignación $\mu_{\{x,y\}}$ tal que $\mu_{\{x,y\}} \succ_E^* \mu$. Si x es también un agente solo, $x \notin m(\mu)$, entonces al asignar entre sí estos agentes se forma una pareja y en consecuencia se incrementa el número de espacios, es decir $\#_h\left(\mu_{\{x,y\}}\right) = \#_h(\mu) + 1 = q + 1 > q$. Esto contradice que $\#_h\left(\mu_{\{x,y\}}\right) \leq q$, por lo tanto debe $x \in m(\mu)$. Por construcción de A^j y dado que $y \notin A^j$, $\mu_1(x) \succ_E y$. Luego $\mu \succ_E^* \mu_{\{x,y\}}$. Esto contradice que $\{x,y\}$ es un par $q-$bloqueante para μ, luego $\mu \in \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$. Por lo tanto $M_q(A,\succ_A) \subseteq \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$. $\square$

Demostración Teorema 11. Sea $\mu \in M_{<q}(A,\succ_A)$ y supongamos $\mu \notin \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$. Por definición de $M_{<q}(A,\succ_A)$ existe $j \in N$ tal que $\mu \in M_{<q}(A^j,\succ_{A^j})$. Las pre-asignaciones de $M_{<q}(A^j,\succ_{A^j})$, son estables, tienen número de habitaciones menor a la cuota y los agentes que están asignados a sí mismos no son mutuamente aceptables. Es decir $\mu \in \mathcal{S}(A^j,\succ_{A^j})$, $\#_h(\mu) < q$ y para todo $x,y \in A : \mu_2(x) = x, \mu_2(y) = y, x \succ_x y$ e $y \succ_y x$. Como hemos supuesto que $\mu \notin \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$ existe un par $\{z,w\}, q-$bloqueante para μ, tal que z y w verifican: $z,w \in m(\mu)$, $w \succ_z \mu_1(z)$ y $z \succ_w \mu_1(w)$ ó $w \notin m(\mu)$, $w \succ_z \mu_1(z)$, $z \succ_w w$, $\mu_{\{z,w\}} \succ_E^* \mu$ y $\#_h\left(\mu_{\{z,w\}}\right) \leq q$. Si z,w no son agentes solos entonces $z,w \in m(\mu) \subseteq A^j$, luego el par $\{z,w\}$ es un par bloqueante para μ en $(A^j,\succ_{A^j})$. Esto contradice que μ es estable en este modelo. Si $w \notin m(\mu)$, entonces necesariamente $z \in m(\mu)$, ya que en caso contrario se contradice la hipótesis de que los agentes solos no son mutuamente aceptables. Esto significa que tiene sentido definir $\mu_{\{z,w\}}$. Pero, por construcción de A^i, podemos asegurar que $\mu_1(z) \succ_E w$ luego $\mu \succ_E^* \mu_{\{z,w\}}$, con lo que hemos mostrado que $\{z,w\}$ no es un par $q-$bloqueante para μ, lo que implica que μ es $q-$estable. Es decir $\mu \in \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$ y por lo tanto $M_{<q}(A,\succ_A) \subseteq \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$. $\square$

Demostración Teorema 12. Hemos probado en la proposición 12, $M_q(A,\succ_A) \subseteq \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$ y en la proposición 11, $M_{<q}(A,\succ_A) \subseteq \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$, luego es inmediato que $M_q(A,\succ_A) \cup M_{<q}(A,\succ_A) \subseteq \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$. Resta probar que $\mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*) \subseteq M_q(A,\succ_A) \cup M_{<q}(A,\succ_A)$.
Sea $\mu \in \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$ y probemos que $\mu \in M_q(A^i,\succ_{A^i})$ o $\mu \in M_{<q}(A^i,\succ_{A^i})$. Sea $i \in N$ el mínimo supraídice tal que $m(\mu) \subseteq A^i$. Como μ es un $q-$estable se verifica que $\#_h(\mu) \leq q$. Esto nos lleva a considerar los casos: $\#_h(\mu) < q$ y $\#_h(\mu) = q$.
a) Si $\#_h(\mu) < q$, como $m(\mu) \subseteq A^i$, tiene sentido probar que $\mu \in M_{<q}(A^i,\succ_{A^i})$. Recordemos que $M_{<q}(A^i,\succ_{A^i})$ está constituido por las pre-asignaciones estables del modelo $(A^i,\succ_{A^i})$, con cardinalidad menor a la cuota y con la propiedad de que los agentes solos no son mutuamente aceptables. Si $\mu \notin M_{<q}(A^i,\succ_{A^i})$, entonces puede ocurrir que $\mu \notin \mathcal{S}(A^i,\succ_{A^i})$. Esto significa que existe un par $\{z,w\}$ bloqueante para μ en este modelo reducido. Pero $A^i \subseteq A$ entonces $\{z,w\}$ es un par bloqueante en $(A,\succ_A)$ y esto contradice que $\mu \in \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$. También puede ocurrir que $\mu \in \mathcal{S}_q((A^i,\succ_{A^i}),\succ_E^*)$ pero existan los agentes $\{a,b\} \subseteq A$ tales que $a,b \notin m(\mu)$, a,b mutuamente aceptables. En este caso podemos considerar la pre-asignación estable $\mu_{\{a,b\}}$, siempre que $\mu_{\{a,b\}} \succ_E^* \mu$. Con estas condiciones el par $\{a,b\}$ es un par $q-$bloqueante para μ en $((A,\succ_A),\succ_E^*,q)$ y esto implica también una contradicción a que $\mu \in \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$. Por lo expuesto cuando $\#_h(\mu) < q$, $\mu \in M_{<q}(A^i,\succ_{A^i}) \subseteq \bigcup_{i \in N} M_{<q}(A^i,\succ_{A^i}) = M_{<q}(A,\succ_A)$ y por lo tanto $\mu \in M_{<q}(A,\succ_A)$.
b) Supongamos que $\#_h(\mu) = q$. Como $\mu \in \mathcal{S}_q((A,\succ_A),\succ_E^*)$, μ no puede estar bloqueado por ningún par de agentes de A, por lo tanto μ es una pre-asignación estable para algún modelo

$(A^j, \succ_{A^j}), j \in N$. Luego $\mu \in \mathcal{S}(A^j, \succ^j_A)$ con $\#_h(\mu) = q$. Esto implica que $\mu \in M_q(A^j, \succ_{A^j}) \subseteq \bigcup_{i \in N} M_q(A^i, \succ_{A^i}) = M_q(A, \succ_A)$. Por lo tanto de los casos a) y b) podemos concluir que $\mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ^*_E) \subseteq M_q(A, \succ_A) \cup M_{<q}(A, \succ_A)$. En consecuencia $\mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ^*_E) = M_q(A, \succ_A) \cup M_{<q}(A, \succ_A)$. □

Demostración Lema 3. Sea $\mu \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ^*_E) \subseteq M_q(A, \succ_A) \cup M_{<q}(A, \succ_A)$, con $\#_h(\mu) = q$, entonces por definición podemos afirmar que $\mu \in M_q(A, \succ_A)$. Por otro lado, por la Proposición 10, $M_q(A, \succ_A) = \dot{\bigcup}_{k \in K} M_q(A^k, \succ_{A^k})$, entonces existe $i \in N$, tal que $\mu \in M_q(A^i, \succ_{A^i})$. □

Demostración Lema 4. Sean $i, j \in N$ tales que $j \leq i$. Supongamos que (ii) es falso y probemos que vale (i). Entonces existe μ tal que, $\mu \in M_q\left(A^i, \succ_{A^i}\right)$ y $\mu \in M_q\left(A^j, \succ_{A^j}\right)$. Por definición de estos conjuntos, en particular $\mu \in \mathcal{S}(A^j, \succ_{A^j})$, entonces $m(\mu) \subseteq A^j$. Consideremos una pre-asignación estable $\overline{\mu} \in M_q\left(A^i, \succ_{A^i}\right)$ entonces $\overline{\mu} \in \mathcal{S}\left(A^i, \succ_{A^i}\right)$. Como estas pre-asignaciones son estables en $(A^i, \succ_{A^i})$, entonces por Teorema 6, ambas tienen los mismos ciclos impares, en particular el mismo conjunto de agentes solos, luego $m(\overline{\mu}) = m(\mu) \subseteq A^j$. Entonces $\overline{\mu} \in M_q\left(A^i, \succ_{A^i}\right),\ j \leq i$ y $m(\overline{\mu}) \subseteq A^j$, por lo tanto por el lema 3, podemos concluir que $\overline{\mu} \in M_q\left(A^j, \succ_{A^j}\right)$. Luego hemos considerado $\overline{\mu} \in M_q\left(A^i, \succ_{A^i}\right)$, y hemos probado que $\overline{\mu} \in M_q\left(A^j, \succ_{A^j}\right),\ j \leq i$. Por lo tanto $M_q\left(A^i, \succ_{A^i}\right) \subseteq M_q\left(A^j, \succ_{A^j}\right)$. □

Demostración Proposición 10. Sea $K = \{k \in N : \forall i < k, M_q(A^k, \succ_{A^k}) \cap M_q(A^i, \succ_{A^i}) = \emptyset\}$. Demostremos primero que $M_q(A, \succ_A) = \bigcup_{k \in K} M_q(A^k, \succ_{A^k})$ y luego, que la unión es disjunta. Por definición del conjunto $M_q(A, \succ_A)$, se verifica $\bigcup_{k \in K} M_q(A^k, \succ_{A^k}) \subseteq M_q(A, \succ_A)$. Demostremos que $M_q(A, \succ_A) \subseteq \bigcup_{k \in K} M_q(A^k, \succ_{A^k})$. Sea $\mu \in M_q(A, \succ_A) = \bigcup_{i \in N} M_q(A^i, \succ_{A^i})$. Entonces existe $j \in N$ tal que $\mu \in M_q(A^j, \succ_{A^j})$. Si $j \in K$, la igualdad queda demostrada. Si $j \notin K$ existe $w \neq j$, tal que $M_q(A^j, \succ_{A^j}) \cap M_q(A^w, \succ_{A^w}) \neq \emptyset$. Sea $i^* \in N$ el mínimo supraíndice tal que $\mu \in M_q(A^{i^*}, \succ_{A^{i^*}})$. Por hipótesis, para todo $\overline{i} < i^*$ se verifica $M_q(A^{i^*}, \succ_{A^{i^*}}) \cap M_q(A^{\overline{i}}, \succ_{A^{\overline{i}}}) = \emptyset$. Observemos que i^* siempre existe, ya que $\mu \in M_q(A^j, \succ_{A^j})$. Además, si no existe $\overline{i}$ en las condiciones anteriores es $i^* = j$ y, en caso contrario, $i^* = \overline{i}$. Probemos que $i^* \in K$. Supongamos que $i^* \notin K$, luego existe $i' < i^*$ tal que $M_q(A^{i'}, \succ^{i'}_A) \cap M_q(A^{i^*}, \succ_{A^{i^*}}) \neq \emptyset$. Entonces por Lema 4, $M_q(A^{i^*}, \succ_{A^{i^*}}) \subseteq M_q(A^{i'}, \succ_{A^{i'}})$. Como $\mu \in M_q(A^{i^*}, \succ_{A^{i^*}})$ la inclusión anterior implica que $\mu \in M_q(A^{i'}, \succ_{A^{i'}})$, pero esto contradice que i^* es el mínimo. Esta contradicción provino de suponer que $i^* \notin K$. Por lo tanto $\mu \in M_q(A^{i^*}, \succ_{A^{i^*}})$, con $i^* \in K$, luego $\mu \in \bigcup_{i \in K} M_q(A^i, \succ_{A^i})$. Entonces $M_q(A, \succ_A) \subseteq \bigcup_{i \in K} M_q(A^i, \succ_{A^i})$. Como se verifica $\bigcup_{k \in K} M_q(A^k, \succ_{A^k}) \subseteq M_q(A, \succ_A)$ y $M_q(A, \succ_A) \subseteq \bigcup_{i \in K} M_q(A^i, \succ_{A^i})$ queda demostrado que: $M_q(A, \succ_A) = \bigcup_{k \in K} M_q(A^k, \succ_{A^k})$. Resta sólo demostrar que esta unión es disjunta. Para ello supongamos que $i, j \in K$ son tales que $M_q(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_q(A^j, \succ_{A^j}) \neq \emptyset$. Por Lema 4, existe $\overline{i} \in J$, dado por $\overline{i} \leq \min\{i, j\}$ tal que $M_q(A^i, \succ_{A^i}) \subset M_q(A^{\overline{i}}, \succ_{A^{\overline{i}}})$ y $M_q(A^j, \succ_{A^j}) \subset M_q(A^{\overline{i}}, \succ_{A^{\overline{i}}})$, contradiciendo esto que $i, j \in K$.

En conclusión: $M_q(A, \succ_A) = \dot{\bigcup\limits_{k\in K}} M_q(A^k, \succ_{A^k})$. $\square$

Demostración Lema 5. Sea $\mu \in \mathcal{S}_q((A, \succ_A), \succ_E^*) \subseteq M_q(A, \succ_A) \cup M_{<q}(A, \succ_A)$, con $\#_h(\mu) = q$, entonces por definición podemos afirmar que $\mu \in M_q(A, \succ_A)$. Por otro lado, por la Proposición 10, $M_q(A, \succ_A) = \dot{\bigcup\limits_{k\in K}} M_q(A^k, \succ_{A^k})$, entonces existe $i \in N$, tal que $\mu \in M_q(A^i, \succ_{A^i})$. $\square$

Demostración Lema 6. Sea $\mu \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$; sea $j \leq i$. Como $m(\mu) \subseteq A^j$, entonces μ es una pre-asignación estable en $(A^j, \succ_{A^j})$. Esto es claro ya que $A^j \subseteq A^i$, y cualquier par de agentes que bloquea a μ en $(A^j, \succ_{A^j})$ es un par de agentes que bloquea a μ en $(A^i, \succ_{A^i})$. Luego como $\mu \in \mathcal{S}(A^i, \succ_{A^i})$ entonces $\mu \in \mathcal{S}(A^j, \succ_{A^j})$. Por hipótesis $\mu \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$, entonces satisface $\#_h(\mu) < q$ y para todo $\{x, y\} \in A$ tal que $\{x, y\} \nsubseteq m(\mu)$, x e y no son mutuamente aceptables. Como $\mu \in \mathcal{S}(A^j, \succ_{A^j})$, $\#_h(\mu) < q$ y para todo $\{x, y\} \in A$ tales que $\{x, y\} \nsubseteq m(\mu)$, x e y no son mutuamente aceptables. Entonces podemos asegurar que $\mu \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. $\square$

Demostración Lema 7. Sean $i, j \in N$ tal que $j \leq i$. Supongamos que $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_{<q}(A^j, \succ_{A^j}) \neq \emptyset$ y demostremos que $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \subseteq M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. Como $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_{<q}(A^j, \succ_{A^j}) \neq \emptyset$; existe $\mu \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$, entonces $\mu \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$ y $\mu \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. Además $\mu \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$, entonces todos los pares $\{x, y\} \in A$ que no son solos están en A^j, es decir que $m(\mu) \subseteq A^j$. Consideremos una pre-asignación estable $\bar{\mu} \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$, y demostremos que $\bar{\mu} \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. Tenemos $\bar{\mu} \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$ y $\mu \in M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$, entonces μ y $\bar{\mu}$ son ambas pre-asignaciones estables en el modelo $(A^i, \succ_{A^i})$. Por lo tanto, por el Corolario 6, tienen los mismos ciclos impares y por ende los mismos agentes solos, por lo tanto $m(\mu) = m(\bar{\mu})$. Luego, como por hipótesis $j \leq i$ y $m(\bar{\mu}) \subseteq A^j$ podemos aplicar el Lema 6. Por lo tanto $\bar{\mu} \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. En consecuencia $M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \subseteq M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. $\square$

Demostración Proposición 11. Sea $\widehat{K} = \{i \in N : \forall\, j \leq i,\, M_{<q}(A^i, \succ_{A^i}) \cap M_{<q}(A^j, \succ_{A^j}) = \emptyset\}$. Primero demostremos que $M_{<q}(A, \succ_A) = \bigcup\limits_{k\in\widehat{K}} M_{<q}(A^k, \succ_{A^k})$ y luego que tal unión es disjunta. Como $\widehat{K} \subset N$, por definición del conjunto $M_{<q}(A, \succ_A)$, se verifica: $\bigcup\limits_{k\in\widehat{K}} M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \subseteq M_{<q}(A, \succ_A)$.

Demostremos que $M_{<q}(A, \succ_A) \subseteq \bigcup\limits_{k\in\widehat{K}} M_{<q}(A^k, \succ_{A^k})$. Supongamos $\mu \in M_{<q}(A, \succ_A) = \bigcup\limits_{l\in N} M_{<q}(A^l, \succ_{A^l})$, entonces existe $j \in N$ tal que $\mu \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. Si $j \in \widehat{K}$, la igualdad queda demostrada. Si $j \notin \widehat{K}$, existe $w \neq j$, tal que $M_{<q}(A^j, \succ_{A^j}) \cap M_{<q}(A^w, \succ_{A^w}) \neq \emptyset$. Sea $k \in N$ el mínimo supraíndice tal que $\mu \in M_{<q}(A^k, \succ_{A^k})$. Es decir que para todo $\overline{k} \neq k$, $\overline{k} \leq k$ se verifica $M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \cap M_{<q}(A^{\overline{k}}, \succ_{A^{\overline{k}}}) = \emptyset$. Observemos que k siempre existe ya que $\mu \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. Además, si no existe $\overline{k}$ en las condiciones anteriores es $j = k$ y, en

caso contrario, $\overline{k} = k$. Probemos que $k \in \widehat{K}$. Supongamos que $k \notin \widehat{K}$, luego existe $j \leq k$: $M_{<q}(A^j, \succ_{A^j}) \cap M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \neq \emptyset$. Aplicando el lema 7,
$M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \subseteq M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$. Como $\mu \in M_{<q}(A^k, \succ_{A^k})$ y $M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \subseteq M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$ entonces $\mu \in M_{<q}(A^j, \succ_{A^j})$, pero esto contradice la minimalidad de k. Esta contradicción provino de suponer que $k \notin \widehat{K}$. Por lo tanto $\mu \in M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \subseteq \bigcup_{i \in \widehat{K}} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$, con $k \in \widehat{K}$, entonces $\mu \in M_{<q}(A, \succ_A)$ y $\mu \in \bigcup_{i \in \widehat{K}} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$, luego $M_{<q}(A, \succ_A) \subseteq \bigcup_{i \in \widehat{K}} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$. Tenemos entonces $\bigcup_{k \in \widehat{K}} M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \subseteq M_{<q}(A, \succ_A)$ y $M_{<q}(A, \succ_A) \subseteq \bigcup_{i \in \widehat{K}} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$, por lo tanto vale $M_{<q}(A, \succ_A) = \bigcup_{i \in \widehat{K}} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$. Resta sólo demostrar que esta unión es disjunta.

Sean $k, k' \in \widehat{K}$ y supongamos que $M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \cap M_{<q}(A^{k'}, \succ_{A^{k'}}) \neq \emptyset$. Aplicando el Lema 7, podemos asegurar que existe $\overline{k} \in N$, siendo $\overline{k} \leq \text{mín}\{k, k'\}$ tal que $M_{<q}(A^k, \succ_{A^k}) \subset M_{<q}(A^{\overline{k}}, \succ_{A^{\overline{k}}})$ y $M_{<q}(A^{k'}, \succ_{A^{k'}}) \subset M_{<q}(A^{\overline{k}}, \succ_{A^{\overline{k}}})$ pero esto contradice que $k \in \widehat{K}$ y $k' \in \widehat{K}$. Esto nos lleva a concluir que la unión es disjunta, es decir: $M_{<q}(A, \succ_A) = \dot{\bigcup}_{i \in \widehat{K}} M_{<q}(A^i, \succ_{A^i})$.
□

Demostración Proposición 12. Sean $((A, \succ_A), q, \succ_E^*)$ y $((A, \succ_A), q, \succ_E^{**})$, modelos generalizados con restricción de cuota, con $\succ_E^*$ y $\succ_E^{**}$ dos extensiones responsive respecto a $\succ_E$. Supongamos que $\mu \in \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^*)$ y que $\mu \notin \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^{**})$. Como $\mu \notin \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^{**})$ entonces existe el par $q-$bloqueante $\{x, y\}$. Luego se verifica que $x, y \in m(\mu)$, $y \succ_x \mu_1(x)$, $x \succ_y \mu_1(y)$ ó $y \notin m(\mu)$, $y \succ_x \mu_1(x)$, $x \succ_y y$, $\mu_{\{x,y\}} \succ_E^{**} \mu$; y $\#_h \left(\mu_{\{x,y\}}\right) \leq q$. Analizamos los siguientes casos:
Caso 1) Si $x, y \in m(\mu) \subseteq A$, entonces constituyen un par $q-$bloqueante en $(A, \succ_A)$ y eso contradice que $\mu \in \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^*)$.
Caso 2) Supongamos que $y \notin m(\mu)$, $x \in m(\mu)$ y $\mu_{\{x,y\}} \succ_E^{**} \mu$ con $\#_h \left(\mu_{\{x,y\}}\right) \leq q$. Como $\succ_E^{**}$ es una extensión responsive de $\succ_E$, y se verifica $m\left(\mu_{\{x,y\}}\right) = m(\mu) \setminus \{\mu_1(x)\} \cap \{y\}$ entonces por la condición 3 de extensión responsive $y \succ_E \mu_1(x)$, por lo tanto $\mu_{\{x,y\}} \succ_E^* \mu$. Por lo tanto $\{x, y\}$ $q-$bloquea a μ. Esto contradice que $\mu \in \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^*)$.
Caso 3) Si $x, y \notin m(\mu)$, podemos definir $\mu_{\{x,y\}}$ tal que $\#_h \left(\mu_{\{x,y\}}\right) > \#_h(\mu)$, entonces por la condición 2 de extensión responsive $\mu_{\{x,y\}} \succ_E^* \mu$, esto contradice que $\mu \in \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^*)$. En forma simétrica se llega a una contradicción si suponemos que $\mu \notin \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^*)$ y $\mu \in \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^{**})$. Luego $\mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^*) = \mathcal{S}_q(A, \succ_A, \succ_E^{**})$. □

Referencias

[1] **ABELEDO, H. y ROTHBLUM, U.** - *Paths to Marriage Stability.* Discrete Applied Mathematics. 63(1): 1-12. (1995).

[2] **BIRÓ, P.** - *The stable matching problem and its generalizations: an algorithmic and game theoretical approach*. Budapest University of Technology and Economics. Sept. (2007).

[3] **CHUNG, K. S.** - *On the existence of stable roommate matchings*. Games Econ. Behav. 33. 206-230. (2000).

[4] **DIAMANTOUDI, E., MIYAGAWA, E. y XUE, L.** - *Random Paths to Stability in the Roommate Problem*. Games and Economic Behavior. 48: 18-28. (2004).

[5] **FEMENIA, D., MARI, M., NEME, A. y OVIEDO, J** - *Stable Solutions on Matching Models with Quota Restriction*. International Game Theory Review. 15. 159-179. (2011)

[6] **GALE, D. y SHAPLEY, L.** - *College Admissions and the Stability of Marriage*. American Mathematical Monthly, 69. 9-15. (1962)

[7] **GUSFIELD, D. e IRVING, R.** - *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. MIT Press, Boston, MA. (1989).

[8] **INARRA, E., LARREA, C. y MOLIS, E.** - *Random Paths to P-stability in the Roommate Problem*. International Journal of Game Theory. 36. 461-471. (2008).

[9] **IRVING, R. W.** - *An efficient algorithm for the "Stable Roommates"Problem*. Journal of Algorithms. 6. 577-595. (1985).

[10] **IWAMA, K., MIYAZAKI, S. y OKAMOTO, K.** - *Stable Roommates Problem with Triple Rooms*. Proceedings of the 10th Korea-Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC 2007), 105-112, Gwangju.(2007).

[11] **KNUTH, D.** - *Mariages stables*. Les Presses De L'Université de Montréal, Montréal. Canada. (1976).

[12] **MARI, M.** - *Assignment models with capacity restriction, path to stability*. Aceptado para su publicación. Revista Brasileira de Economía de Empresas. BJBE. (2012).

[13] **ROTH, A. E. y VANDE VATE. J.** - *Random Paths to Stability in Two-Sided Matching*. Econometrica. 58: 1475-1480. (1990).

[14] **TAN, J** - *A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Complete Stable Matching*. Journal of Algorithms 12. 154-178. (1991)

[15] **TAN, J. y HSUEH, Y.** - *A generalization of the stable matching problem*. Discrete Appl. Math., 59(1):87(102). (1995).