

Asociación Argentina de Economía Política  
LIX Reunión Anual - 20, 21 y 22 de noviembre de 2024

## Midiendo la relación entre crecimiento e inversión en un modelo AK

Luis A. Acedo C.<sup>\*</sup>, Sergio V. Barone<sup>†</sup>, Ricardo L. Descalzi<sup>‡</sup>, José L. Navarrete<sup>§</sup>

August 31, 2024

### Resumen

En este trabajo tomamos datos de la economía mundial y analizamos si éstos se ajustan con un modelo de crecimiento de tipo AK. Ajustamos un panel ARDL a los fines de analizar la relación de largo plazo entre las tasas de crecimiento y la inversión, conforme al modelo de presentado por Jones (1995). Los resultados muestran que el coeficiente que mide el impacto de la tasa de inversión sobre la tasa de crecimiento de un país en el largo plazo estimado es significativo, positivo y asume un valor entre 0.11 y 0.13, dependiendo de la base de datos utilizada. La estrategia de estimación utilizada también permite apreciar que entre un 87% y 88% de una desviación transitoria entre estas variables se corrige en el primer período.

**Palabras Claves:** Crecimiento endógeno, Inversión, Panel ARDL.

**Clasificación JEL:** O41, O47, O50, 054.

---

<sup>\*</sup>Universidad Nacional de Córdoba. Argentina. Address: Valparaíso s/n. Ciudad Universitaria, Córdoba (5000). Argentina E-mail: luis.acedo.colli@mi.unc.edu.ar

<sup>†</sup>Universidad Nacional de Córdoba. Argentina. Address: Valparaíso s/n. Ciudad Universitaria, Córdoba (5000). Argentina TE +54-351-4437300. Oficina: 239. E-mail: sbarone@eco.uncor.edu

<sup>‡</sup>Universidad Nacional de Córdoba. Argentina. Address: Valparaíso s/n. Ciudad Universitaria, Córdoba (5000). Argentina TE +54-351-4437300. Oficina: 246. E-mail:ricardo.descalzi@unc.edu.ar

<sup>§</sup>Universidad Nacional de Córdoba. Argentina. Address: Valparaíso s/n. Ciudad Universitaria, Córdoba (5000). Argentina TE +54-351-4437300. Oficina: 209. E-mail: jlnavarrete@unc.edu.ar

# Midiendo la relación entre crecimiento e inversión en un modelo AK

Luis A. Acedo C., Sergio V. Barone, Ricardo L. Descalzi, José L. Navarrete

## 1 Introducción

Uno de los efectos del desarrollo de los modelos de crecimiento endógeno fue la ampliación de los márgenes de actuación de la política pública sobre el desarrollo de largo plazo de una economía. Jones (1995) señala que una característica en este tipo de formulaciones es que los cambios permanentes en las variables que potencialmente se ven afectadas por la política gubernamental conducen a cambios permanentes en las tasas de crecimiento.

De esta manera se abre la posibilidad que la política económica accione sobre ciertas variables de política, para generar efectos permanentes sobre la tasa de crecimiento de la economía, en contraste con los modelos preliminares de crecimiento neoclásico desarrollados a partir de los trabajos de Solow (1956) y Swan (1956), donde la dinámica de crecimiento se encuentra gobernada por una tasa de progreso técnica exógena.

Sobre la base de la revisión literaria de Grossman and Helpman (1991a), Grossman and Helpman (1991b), Jones (1995) menciona las siguientes variables que podrían influir sobre la tasa de crecimiento de largo plazo de la economía: la tasa de inversión física, la tasa de inversión en capital humano, la proporción de exportaciones, la orientación “hacia adentro” de la economía, la fortaleza de los derechos de propiedad, el consumo gubernamental, crecimiento demográfico y la presión regulatoria.

Jones (1995) sostiene que los cambios permanentes en estas variables deberían conducir a cambios permanentes en las tasas de crecimiento. Sin embargo, encuentra que si bien muchas de estas variables de política económica, aportadas por los modelos de crecimiento endógeno, reflejaron movimientos grandes y persistentes, las tasas de crecimiento del PIB per cápita no muestran persistencia alguna, o bien acusan una tendencia decreciente.

Ante este panorama Jones (1995) sugiere a priori: dos posibilidades o bien que los movimientos de las variables que pueden tener efectos permanentes sobre las tasas de crecimiento se han ido compensando, o bien que las predicciones de los modelos de crecimiento endógenos no son representativas de la realidad.

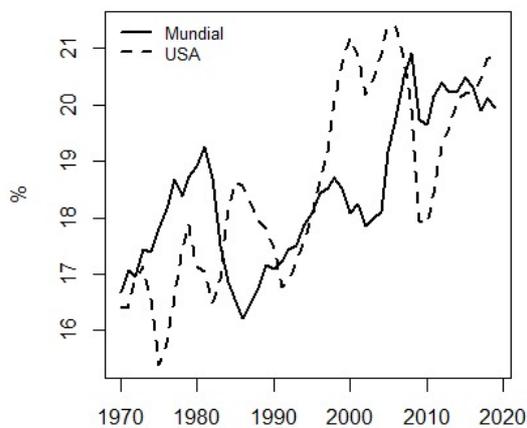
A los fines de llevar a cabo un contraste formal del “efecto crecimiento” que poseen las variables de política mencionadas más arriba, utiliza dos clases de modelos de crecimiento endógeno presentes en la literatura, los modelos de crecimiento AK de Romer (1987) y Rebelo (1991), entre muchos otros, y los modelos de crecimiento basados en I+D de Romer (1990), Grossman y Helpman (1991) y Aghion and Howitt (1992). En ambos casos, concluye que los modelos considerados no proporcionan una buena descripción del crecimiento en las economías avanzadas.

En este trabajo se lleva a cabo un contraste del mismo modelo de crecimiento AK sugerido por Jones (1995). Para ello se utiliza un modelo de panel ARDL. La ven-

taja de utilizar este modelo de estimación es que se puede estimar la relación de largo plazo entre la tasa de inversión y la tasa de crecimiento, sin la necesidad de explicar simultáneamente el vínculo entre el crecimiento y otras variables de política económica que también podrían explicar el crecimiento.

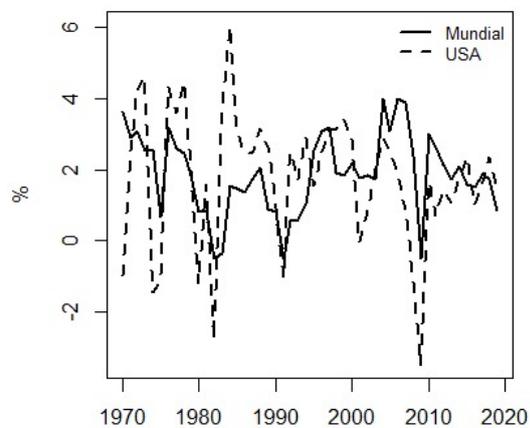
La figura 1 muestra la relación inversión-pib. Se toma el promedio simple para toda la muestra de países disponible, por un lado, y el valor correspondiente para Estados Unidos (EEUU), por otro. A través del gráfico se observan diferencias en ambas trayectorias que podrían estar explicadas por diferentes procesos generadores de datos. El panel de datos sugiere a priori la presencia de efectos locales o idiosincrásicos que inciden sobre el crecimiento de largo plazo de las diferentes economías. La Figura 2, que muestra las tasas de crecimiento, indica también la existencia de diferencias entre países.

Figure 1: Inversión-Producto



Fuente: Elaboración propia.

Figure 2: Tasa de crecimiento del PIB



Fuente: Elaboración propia.

Entonces, los coeficientes que miden el vínculo entre la tasa de crecimiento y la inversión que surgen de la estimación de un "Panel ARDL" reflejarían de manera más acertada el "promedio mundial". En este trabajo nos enfocamos en la estimación de este efecto promedio, dejando de lado el estudio de las razones por las cuales las estimaciones para una economía en particular diverge de la media mundial para otro estudio.

Utilizamos dos bases de datos, las provistas por las *Penn World Tables* -Feenstra et al. (2015)- por un lado, y el Fondo Monetario Internacional por el otro -Xiao et al. (2021). En ambos casos, se incluyen 141 países durante 1970-2019. De esta manera se analiza la estabilidad de las estimaciones utilizando dos conjuntos de datos de diferentes.

En la próxima sección se lleva a cabo una revisión de la literatura sobre crecimiento económico, particularmente enfocada sobre los modelos de crecimiento de tipo AK. Sobre esa base en la sección siguiente se presentará el modelo de Jones (1995), que es el que se utilizará para interpretar las estimaciones. Seguidamente, se presenta la metodología de estimación por paneles ARDL. Luego se analizan los resultados. Finalmente, se concluirá comentando sobre los principales hallazgos.

## 2 Revisión de la literatura

En esta sección analizamos la transición entre los modelos de crecimiento exógenos a los primeros prototipos de crecimiento endógeno, modelos AK y con énfasis en el capital humano. El objetivo es analizar las variables de política económica que podrían determinar la tasa de crecimiento en este tipo de formulaciones.

### 2.1 Modelos de crecimiento exógenos

Dentro del grupo de modelos de crecimiento exógeno, el modelo de Solow-Swan, con tasa de ahorro constante, realiza su aporte al explicar un estado estacionario en términos del capital por trabajador efectivo. Dados los supuestos sobre la función de producción agregada con rendimientos constantes a escala, en este modelo el producto per cápita y el capital per capita varían en el mismo porcentaje que la tasa de cambio tecnológico que se supone exógena. Este modelo adolece del problema que el consumo máximo puede lograrse sólo por casualidad, cuando se cumple la “regla de oro”. Por otra parte, la evidencia muestra los problemas que tiene esta representación para explicar las diferencias en los niveles de renta per cápita entre países utilizando solamente que las brechas en los niveles de capital per cápita.

El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans<sup>1</sup>, el individuo optimiza entre consumo presente y consumo futuro, demostrando la existencia de un nivel de estado estacionario del producto por trabajador efectivo por debajo del nivel de la “regla de oro”, debido a la introducción del factor subjetivo de preferencia temporal. Sin embargo, la caracterización del crecimiento es parecida a la del modelo de Solow en el estado estacionario, puesto que la renta y el capital per cápita crecen en términos de una tasa de progreso tecnológico que no es explicada por el modelo.

La aparición de los modelos de generaciones superpuestas, del tipo de Diamond-Samuelson<sup>2</sup> permitieron explicar el problema de la ineficiencia dinámica. Bajo este tipo de representaciones puede existir un equilibrio que no es óptimo en el sentido de Pareto cuando las tasas de interés son excesivamente bajas (en el caso de economías con mucho capital), y la productividad marginal del capital (que a su vez determina a la tasa de interés real) es menor que la tasa de crecimiento de la población. Si este fuera el caso, las generaciones que desahorran (los jubilados) tendrían un mayor nivel de bienestar (mayor consumo) bajo un régimen de reparto, debido a que los aportes de la población activa que financian la formación de capital en  $t$  (y el consumo de las personas que eran activas en  $t-1$ ) crecen con la tasa de crecimiento poblacional. Sin embargo, en el equilibrio, y al igual que en los dos modelos anteriores, la economía se comporta con niveles de renta y capital per-cápita evolucionando a través del tiempo en términos de la tasa de cambio tecnológico.

En todo caso, los tres modelos anteriores explican diferentes ritmos de convergencia hacia el estado estacionario, pero una vez en esta posición, los determinantes de la tasa de crecimiento de largo plazo (en términos de la renta per cápita) permanecen “sin

---

<sup>1</sup>Ramsey (1928), Cass (1965), Koopmans (1965) y Koopmans (1967)

<sup>2</sup>Diamond (1965) y Samuelson (1958)

explicación”.

## 2.2 El crecimiento endógeno

Heijdra (2017) menciona tres abordajes para considerar el tema de crecimiento endógeno. En primer lugar, agrupa a los modelos “fundamentalistas de capital”. Estos modelos enfatizan el papel del capital en la función de producción, y demuestran cómo el comportamiento de este insumo puede eliminar la presencia de rendimientos decrecientes en la función de producción capital intensiva.

### 2.2.1 La sustuibilidad del capital

En este primer grupo, a su vez explica la aparición de una tasa de crecimiento de estado estacionario para el capital per cápita (que en los modelos de crecimiento exógenos permanece fija) que depende ahora de los parámetros del modelo y de la tasa de ahorro. Se supone, en definitiva, que la mano de obra sea “fácil de sustituir”, y que con una función de producción CES, puede generarse “un crecimiento endógeno por sustitución de mano de obra”.

### 2.2.2 Los modelos AK

Otro agrupamiento tipo de los modelos “fundamentalistas del capital” están dados por los de tipo AK. Hay rendimientos decrecientes del capital a nivel microeconómico, pero existen efectos externos que resultan en rendimientos constantes del capital a nivel macroeconómico.

#### 2.2.2.1 Efectos externos para la inversión privada

Heijdra (2017) presenta una primera versión de este tipo de modelos, que se basa en efectos externos que operan entre empresas privadas en la economía. Hay un gran número de empresas idénticas y perfectamente competitivas. Las firmas poseen una tecnología con rendimientos de escala decrecientes para ambos factores de producción individualmente considerados, incluido el capital, y presenta rendimientos constantes a escala para los factores de producción en conjunto:

$$Y_i(t) = F(K_i(t), L_i(t)) \equiv Z(t)K_i(t)^\alpha L_i(t)^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

$Y_i(t)$  es el producto de la firma  $i$  en el período  $t$ .  $K(t)$  representa el capital,  $L(t)$  el trabajo,  $Z(t)$  la productividad total de los factores, y  $\alpha$  la participación del capital en la remuneración total de los factores. Las firmas maximizan el valor descontado de sus flujos de efectivo. En este modelo las firmas reciben un subsidio a la inversión  $s_I$ , mientras que la ley de acumulación de capital es igual a la del modelo de Solow. Los factores se remuneran en función de productividad marginal.

Siguiendo a Saint-Paul (1992), y Paul Romer (1989), se supone que la externalidad entre empresas adopta la siguiente forma:

$$Z(t) = z_0 K(t)^{1-\alpha}$$

donde  $z_0$  es una constante positiva y  $K(t)$  es el stock de capital agregado. La participación del trabajo en el ingreso nacional es positiva y hay rendimientos constantes del capital a nivel macroeconómico. Este último resultado se deduce del hecho de que los exponentes de  $K_i(t)$  (función de producción de la firma individual) y de  $K(t)$  (en la ecuación que representa la externalidad) suman la unidad.

Finalmente, postulamos la existencia de una representación de vida infinita. Hay un hogar representativo, que maximiza la utilidad de por vida. La función de utilidad posee elasticidad de sustitución intertemporal constante,  $t_C$  es un impuesto al consumo,  $T(t)$  es un impuesto de suma global (o transferencia si es negativo),  $A(t)$  representa activos financieros y  $r(t)$  es la tasa de interés. La economía es cerrada y no hay deuda pública, por lo que el único activo financiero que se puede acumular son las acciones de las empresas.

La solución es un equilibrio inestable. En el estado estacionario, y suponiendo que la relación entre el consumo y el capital permanece estable, entonces, el stock de capital, la inversión y la producción crece a la misma tasa que el consumo.

La tasa de crecimiento de la economía en el largo plazo  $\gamma^*$  depende de la elasticidad de sustitución intertemporal  $\sigma$ , de la participación del capital en el ingreso nacional ( $\alpha$ ), la oferta de trabajo de la economía  $L_0$ , la tasa de depreciación ( $\delta$ ), y de la tasa de descuento subjetiva  $\rho$ .

$$\gamma^* = \sigma \left( \frac{\alpha z_0 L_0^{1-\alpha}}{1 - s_I} - \delta - \rho \right) > 0$$

A diferencia de lo que ocurre en los modelos de crecimiento exógeno, la tasa de crecimiento de la economía puede verse afectada permanentemente por el subsidio a la inversión. Un aumento de  $s_I$  aumenta la rentabilidad de la inversión privada y conduce a una tasa de interés más alta. Entonces, la tasa de crecimiento del consumo aumenta (hay un perfil de consumo intertemporal más “pronunciado”, disminuyendo el consumo presente). Finalmente, aumenta la tasa de acumulación de capital en la economía.

Dos aclaraciones. Primero, el modelo exhibirá una dinámica transicional si el impuesto al consumo o el subsidio a la inversión varían en el tiempo, ya que en ese caso la tasa de interés real variará con el tiempo y los agentes reaccionarán a esto. En segundo lugar, el equilibrio en el modelo básico de AK generalmente no es eficiente en el sentido de Pareto: a diferencia del planificador central, las empresas privadas no toman en cuenta el efecto externo de su propia decisión de acumulación de capital sobre el nivel general de productividad que enfrentan todas las empresas de la economía.

### 2.2.2.2 Efectos externos entre las empresas y el gobierno

Barro (1990) sugirió por primera vez una segunda versión del modelo AK. En este modelo, el stock de infraestructura pública afecta la productividad de las empresas

privadas y, por tanto, tiene un efecto sobre la tasa de crecimiento económico.

Aquí la ecuación de la externalidad está dada por:

$$Z(t) = z_0 K_G(t)^{1-\alpha}$$

donde  $K_G(t)$  es el stock de capital público, que consiste en objetos de infraestructura como carreteras, aeropuertos, puentes y similares. El gasto público **productivo** afecta a todos los productores por igual, estos servicios se brindan de forma gratuita y no hay efecto de congestión.

Algunas aclaraciones. Primero, para un stock constante de capital público, la función de producción macroeconómica presentada tiene rendimientos decrecientes para el stock de capital privado,  $K(t)$ , porque  $\alpha$  es menor que la unidad. Sin embargo, si de alguna manera el gobierno logra mantener una relación constante entre los stocks de capital público y privado, entonces el modelo terminará pareciéndose mucho al modelo estándar de AK y, por lo tanto, mostrará un crecimiento endógeno.

Nuevamente, lo que hace que este modelo funcione es el hecho de que los exponentes de  $K(t)$  en la función de producción y de  $K_G(t)$  en la ecuación de la externalidad suman precisamente la unidad.

En segundo lugar, manteniendo constante la relación entre los dos tipos de capital, el impuesto sobre la producción afecta la tasa de interés y, por tanto, la tasa de crecimiento de la economía. Ceteris paribus, el impuesto sobre la producción ejerce una influencia negativa sobre la tasa de crecimiento del capital privado porque reduce la productividad marginal del capital.

Se puede demostrar que, dadas las condiciones iniciales para los dos stocks de capital ( $K(0)$  y  $K_G(0)$ ), el modelo es estable y converge hacia una trayectoria de crecimiento equilibrado. A lo largo de esta trayectoria de crecimiento equilibrado, la tasa de interés es constante y todas las variables macro crecen a la misma tasa de crecimiento endógeno,  $\gamma^*$ .

Intuitivamente, al aumentar continuamente el stock de capital público, el gobierno logra negar el efecto de los rendimientos decrecientes del capital privado que de otro modo resultarían de la acumulación continua de capital. Puede hacerlo sin tasas impositivas cada vez mayores (y por lo tanto, en última instancia, inviables) porque la base impositiva (producción bruta) crece al mismo ritmo que lo hace el stock de capital privado.

El modelo permite analizar la relación de largo plazo entre impuestos, gasto fiscal improductivo y tasa de crecimiento. Así, en el estado estacionario se verifica:

$$\gamma^* = (\alpha^\alpha Z_0)^{1/(1-\alpha)} (t_Y - g) \left( \frac{1 - t_Y}{r^* + \delta_k} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} - \delta_g$$

$t_Y$  es la tasa impositiva,  $g$  es el porcentaje de gasto improductivo,  $\delta_k$  es la tasa de amortización del capital privado y  $\delta_g$  es la tasa de amortización del capital público.

Una disminución en la proporción del gasto público improductivo,  $g$ , dirige los ingresos del gobierno de fines improductivos a propósitos productivos y aumenta la tasa de crecimiento de la economía.

Los efectos de un aumento del impuesto sobre la producción son más complejos porque existen mecanismos de compensación. Por un lado, un aumento en  $t_Y$  aumenta los ingresos del gobierno, aumenta la acumulación de capital del gobierno y, por lo tanto, aumenta el crecimiento. Sin embargo, un aumento de  $t_Y$  distorsiona las decisiones económicas de los agentes privados, lo que conduce a una reducción de la base imponible (producción) y a una disminución de la acumulación y el crecimiento del capital público. El modelo define una tasa de crecimiento que maximiza el crecimiento de largo plazo ( $\gamma_{max}^*$ ), para cual  $t_Y = 1 - \alpha(1 - g)$ .

### 2.2.2.3 Capital humano y crecimiento endógeno

El segundo grupo de modelos se refiere a la formación de capital humano en la gestación del crecimiento endógeno. Uzawa (1965), una contribución pionera a la literatura, argumentó que el progreso tecnológico (que aumenta la mano de obra) no debería verse como una especie de “maná del cielo”, sino más bien como el resultado de acciones intencionales de agentes económicos que emplean recursos escasos para avanzar en el estado del conocimiento tecnológico.

Mientras que Uzawa interpreta  $Z_L(t)$  de manera muy amplia como si consistiera en actividades como educación, salud, construcción y mantenimiento de bienes públicos (1965, p. 18), Lucas adopta una interpretación más específica al interpretar  $Z_L(t)$  como capital humano. En segundo lugar, Lucas (1988) cita a Rosen (1976), cuyos hallazgos sugieren que la evidencia empírica sobre los ingresos individuales es consistente con una función de producción de conocimiento que es lineal en el acervo de conocimiento.

Lucas supone que la productividad marginal del trabajo en la función de producción de capital humano es constante, es decir:

$$\Psi(x) = Z_E x$$

$x$  es la dotación de capital humano, y  $Z_E > 0$  es un índice constante de productividad educativa. Sobre la base de las consideraciones anteriores, Lucas adopta una especificación para la función de acumulación de capital humano que generalizamos ligeramente para permitir la depreciación:

$$\frac{\dot{H}(t)}{H(t)} = Z_E \frac{L_E(t)}{L(t)} - \delta_h$$

donde  $\delta_h$  es la tasa de depreciación del capital humano ( $\delta_h > 0$ ). La tercera modificación que hace Lucas es asumir una función de felicidad curva (en lugar de lineal). La función de utilidad de vida para el hogar representativo de vida infinita viene dada por una función CES. El resto del modelo es bastante estándar. Para simplificar las cosas, hacemos abstracción del crecimiento de la población, es decir,  $L(t) = L_0$  (una constante). Esto significa que la restricción de tiempo se puede escribir como:

$$L_E(t) + L_P(t) = L_0$$

Siguiendo a Lucas asumimos que la función de producción agregada de bienes es de la forma Cobb-Douglas:

$$Y(t) = F(K(t), N_P(t)) = Z_Y N_P(t)^{1-\alpha} K(t)^\alpha$$

donde  $Z_Y$  es un índice de productividad general y  $N_P(t)$  es la mano de obra efectiva utilizada en producción de bienes, es decir, horas-hombre ponderadas por habilidades:

$$N_P(t) = H(t) L_P(t).$$

Si la tecnología es linealmente homogénea y la competencia es perfecta, es apropiado postular la existencia de una empresa representativa. Analizando las retribuciones del trabajo y el capital, y teniendo en cuenta que estas se determinan en función de las productividades marginales dado el supuesto de competencia perfecta, para una intensidad de capital dada,  $k(t)$ , la tasa salarial aumenta a medida que aumenta el nivel de habilidades. Esto le da al hogar un claro incentivo para acumular capital humano. Otra cosa importante a tener en cuenta es que, desde el punto de vista del agente individual descrito aquí, el producto marginal del trabajo efectivo ( $F_N$ ) se da como dado ya que depende de la relación agregada entre capital físico y trabajo efectivo.

El hogar representativo elige secuencias de consumo y existencias del capital físico y humano para maximizar la utilidad de por vida sujeto a la restricción temporal de capital humano, la identidad de acumulación para el capital físico, la expresión de acumulación para el capital humano, y la identidad presupuestaria donde queda explícito que el gobierno cobra un impuesto tipo *lump sum* y donde además el individuo es beneficiado con un subsidio educativo invariable en el tiempo.

Dadas las condiciones iniciales para los stocks de capital físico y humano,  $K(0)$  y  $H(0)$ , el modelo es estable en el punto de silla y converge gradualmente hacia una trayectoria de crecimiento equilibrado. A lo largo de la trayectoria de crecimiento equilibrado, la tasa de interés es constante y todas las variables macro crecen a la misma tasa de crecimiento endógeno,  $\gamma^*$ .

Se deduce que la tasa de crecimiento en estado estacionario depende positivamente del subsidio a la educación ( $s_E$ ). Un aumento en  $s_E$  conduce a un aumento en la fracción de tiempo dedicado a actividades educativas, lo que impulsa el crecimiento económico. En estado estacionario:  $d\gamma^*/ds_E > 0$

Finalmente, Heijdra (2017) se focaliza en los modelos de “tecnología endógena”. En esta revisión literaria hacemos foco en los modelos de crecimiento endógeno de los dos primeros grupos anteriores, aquellos que focalizan el rol del capital (“modelos fundamentalistas en capital”) y los modelos que enfatizan el papel de la formación de capital humano en el crecimiento económico.

### 3 Hipótesis a contrastar

En esta sección tomamos como referencia el modelo de capital humano de Jones (1995) para llevar a cabo la contrastación. La idea básica en esta representación es que se utiliza una definición suficientemente amplia del capital como el mecanismo para

generar crecimiento endógeno.

Considere un modelo de crecimiento simple con una tecnología de producción de rendimientos constantes:

$$\max_{i_t^k, i_t^h} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

sujeto a:

$$c_t = (1 - i_t^k, i_t^h) y_t$$

$$y_t = A k_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$$

$$\dot{k}_t = i_t^k y_t - \delta k_t$$

$$\dot{h}_t = i_t^h y_t - \delta h_t$$

$u(c_t)$  es una función de utilidad *CRRA* con elasticidad intertemporal de sustitución  $\sigma$ ,  $c$  es consumo,  $y$  es la producción,  $\delta$  es la tasa de depreciación (se supone que es la misma para ambos tipos de capital),  $\rho$  es la tasa de preferencia temporal.  $i^k$  y  $i^h$  son las tasas de inversión en capital físico y humano, respectiva activamente. La producción en este modelo exhibe rendimientos constantes en los factores acumulables, que generarán crecimiento endógeno.

Resolviendo el problema de la función (que definiremos como  $t$ ), es constante e igual a  $(1 - \alpha)/\alpha$ . Dado que en este caso no existen costos de ajuste modelo, la economía ajustará instantáneamente las cantidades iniciales de  $k$  y  $h$  para que se logre esta relación. En presencia de costos de ajuste, los resultados en esta sección probablemente se mantendrían por una senda de crecimiento equilibrado. Así, aunque este modelo permite el segundo bien de capital que se acumula endógenamente, de hecho los dos tipos de capital se acumulan al unísono. Usando este hecho, podemos reescribir la función de producción en términos de una nueva "forma reducida" tecnología de producción:

$$y_t = A k_t, \quad \tilde{A} = A \Psi^{1-\alpha}$$

Consideremos ahora la relación de estado estacionario entre la tasa de crecimiento y la tasa de inversión. Podemos tomar los logaritmos y derivar para encontrar:

$$g_y = -\delta + \tilde{A} \cdot i^k$$

Es decir, la tasa de crecimiento de estado estacionario de la producción,  $g_y$ , es una transformación afín de la tasa de inversión para el capital físico. En este modelo, entonces, la dinámica de las tasas de crecimiento debería ser similar a la dinámica de las tasas de inversión. Un aumento en la tasa de inversión (por ejemplo, debido a un aumento en el subsidio o una caída en la tasa de preferencia temporal) será correspondido por un aumento en la tasa de crecimiento de estado estacionario.

Por lo tanto, las pruebas de series de tiempo de la restricción dada en la ecuación representarán una prueba de toda una clase de modelos en la literatura, y el rechazo de esta restricción sugeriría que la acumulación de capital humano o tecnología y la acumulación de capital físico deben ser modeladas con más cuidado.

En la sección siguiente se lleva a cabo el test de la ecuación anterior utilizando un modelo de ARDL en paneles.

## 4 Metodología

El objetivo del presente trabajo es estudiar la relación de largo plazo entre la tasa de crecimiento del producto per cápita y la ratio inversión-pbi. Concretamente, se busca estimar los coeficientes de largo plazo entre la tasa de crecimiento del producto y la participación de la formación bruta de capital en el pbi. Con este propósito, se utiliza un modelo de paneles heterogéneos autorregresivo de rezagos distribuidos lineal (ARDL) controlado por efectos correlacionados comunes (Chudik and Pesaran (2015), Pesaran and Smith (1995), Pesaran et al. (1999), Shin et al. (2014)).

En términos generales, un modelo ARDL( $p_y, q_x$ ) con efectos correlacionados comunes puede ser presentado de la siguiente manera:

$$y_{i,t} = \sum_{j=1}^{p_y} \lambda_{i,j} y_{i,t-j} + \sum_{j=0}^{q_x} \beta_{i,j} x_{i,t-j} + \sum_{j=0}^p \gamma' \bar{z}_{t-j} + \mu_i + \epsilon_{i,t} \quad (1)$$

donde  $y_{i,t}$  es la variable dependiente,  $x_{i,t}$  es la variable explicativa,  $\bar{z}_t = (\bar{y}, \bar{x})'$  es el promedio transversal de las variables dependientes e independientes,  $\mu_i$  es el efecto fijo de cada grupo,  $\lambda_{i,j}$  es el coeficiente asociado a los rezagos de la variable dependiente y  $\beta_{i,j}$  el asociado a la variable independiente,  $\gamma'$  son los coeficientes estimados del promedio de la dependencia transversal,  $\epsilon_{i,t}$  los residuos,  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $t = 1, 2, \dots, T$ .

Seguindo a Ditzen (2018), Ditzen (2021), para estimar la relación de largo plazo, o el efecto de las variables explicativas sobre la variable dependiente en estado estacionario a partir de la Ecuación 1, se tiene:

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{j=0}^{p_x} \hat{\beta}_{j,i}}{1 - \sum_{j=1}^{p_y} \hat{\lambda}_i} \quad (2)$$

De la Ecuación 2 se tiene que  $\hat{\theta}_i$  son los coeficiente de largo plazo de  $i$  que pueden ser estimados por medio del estimador *mean group* o *pooled*.

Para el caso bajo estudio, el modelo ARDL( $p, q$ ) a ser estimado es el siguiente:

$$g_{i,t} = \sum_{j=1}^{p_y} \lambda_{i,j} g_{i,t-j} + \sum_{j=0}^{q_x} \beta_{i,j} x_{i,t-j} + \sum_{j=0}^p \gamma'_{i,t} \bar{z}_{t-j} + \mu_i + \epsilon_{i,t} \quad (3)$$

De la Ecuación 9 se tiene que  $g_{i,t}$  corresponde a la tasa de crecimiento del pbi per cápita del país  $i$  en el periodo  $t$  (los datos son anuales). Asimismo,  $x_{i,t}$  representa a las variables que describen la tasa de inversión en logaritmos. Finalmente,  $\bar{z}_t$  hace referencia al promedio de las variables dependiente e independientes.

## 5 Discusión de resultados

Para verificar que el orden de integración de las variables incluidas en los modelos sea menor a dos, se utilizó la prueba ADF de Fisher (F-ADF) y la prueba de Im et al. (2003) (IPS). Ambas permiten testear la hipótesis nula de que todos los paneles tienen raíz unitaria (es decir, son no estacionarios) cuando los paneles no estén balanceados. Los tests de cointegración de Pedroni (1999), Pedroni (2004), Kao (1999) y Westerlund (2005) se emplean para comprobar la existencia de una relación de equilibrio de largo plazo entre las variables, sin importar si son  $I(0)$  o  $I(1)$ . Todas las pruebas tienen como hipótesis nula la no cointegración.

Además, se utilizan los métodos desarrollados por Chudik and Pesaran (2015) para evaluar si los residuos están correlacionados entre grupos; es decir, si existe dependencia entre grupos o *cross-sectional dependence*<sup>3</sup>. De existir, las estimaciones se llevarán a cabo incluyendo los promedios rezagados de cada grupo, como proponen Chudik and Pesaran (2015).

Las pruebas de raíz unitaria realizadas rechazan la hipótesis nula en todos los casos (Tabla 1), lo cual indica que las variables son estacionarias en niveles ( $I(0)$ ).

Table 1: Pruebas de raíz unitaria para datos de panel

	DGDP	INV-GDP-PWT	INV-GDP-FMI
IPS	-46.64***	-10.33***	-6.00***
F-ADF Chi-sq	2138.37***	602.33***	486.66***

**Fuente:** elaboración propia.

**Notas:** \*\*\* representa significancia estadística del 1%.

Para contrastar la hipótesis de cointegración entre la tasa de crecimiento del producto y la tasa de inversión, se procedió a realizar diversos test para datos de panel en especificaciones de modelos alternativas. Así, los modelos A y B presentados en la Tabla 2 incluyen como única variable explicativa a la tasa de inversión (el modelo “A” hace referencia a la tasa de inversión obtenida mediante la PWT (variable INV-GDP-PWT), mientras que el modelo “B” la tasa de inversión se obtiene del FMI (variable INV-GDP-FMI)).

<sup>3</sup>De darse la presencia de cierta dependencia entre las unidades de observación a través de un factor común que afecte a las mismas (cross-sectional dependence o CD), ignorarla al momento de la estimación llevaría a estimadores sesgados e inconsistentes (Chudik and Pesaran (2015), Ditzen (2018), Ditzen (2021)).

Table 2: Pruebas de cointegración para datos de panel

Estadístico	A	B
Pedroni rho	-55.39***	-54.57***
Pedroni PP	-53.77***	-52.83***
Pedroni ADF	-52.10***	-51.06***
Kao ADF	-59.22***	-58.10***
Westerlund	-11.31**	-11.33***

**Fuente:** elaboración propia.

**Notas:** \*\* y \*\*\* representa significancia estadística del 5% y 1% respectivamente.

Las pruebas de Pedroni y Kao confirmarían la existencia de una relación de equilibrio de largo plazo para todos los modelos propuestos con un nivel de significatividad del 1%. El test de Westerlund también rechaza la hipótesis nula de no cointegración al 1%. Por lo tanto, los diferentes test de cointegración estarían acreditando una relación de cointegración entre la tasa de crecimiento del producto per cápita y la tasa de inversión.

Seguidamente, para contrastar la hipótesis de homogeneidad de pendientes en paneles largos, se procedió a realizar el test propuesto por Pesaran and Yamagata (2008). La hipótesis nula establece que todas las pendientes de las unidades de observación (países en nuestro caso) son iguales. En la Tabla 3 se exponen los resultados de las estimaciones, donde en todos los modelos propuestos se rechaza la hipótesis nula de homogeneidad de pendientes, lo que sugiere que se trata de un panel largo con coeficientes heterogéneos.

Table 3: Test de homogeneidad de pendientes

	A	B
Delta	9.36***	8.89***
Delta adj.	9.78***	9.29***

**Fuente:** elaboración propia.

**Nota:** \*\* y \*\*\* representa significancia estadística del 5% y 1% respectivamente.

Una vez confirmada la estacionariedad de las variables, la cointegración entre las mismas y la heterogeneidad de pendientes, se procedió a estimar la Ecuación 3. Específicamente, se estimó un modelo ARDL(1,1) cuyos resultados se exponen en la Tabla 4. Los resultados de los coeficientes de largo plazo fueron obtenidos con el estimador

mean-group.

Table 4: Resultados estimación de modelo de Jones - ARDL(1,1) versión ECM

	A	B
Velocidad de ajuste	-0.88*** (0.021)	-0.87*** (0.022)
D. INV-GDP-PWT - CP	0.45*** (0.042)	
INV-GDP-PWT - LP	0.13*** (0.187)	
D. INV-GDP-FMI - CP		0.46*** (0.078)
INV-GDP-FMI - LP		0.11*** (0.036)
Constante	0.004 (0.008)	0.051 (0.031)
N	6382	6245
N_g	140	138
T	49	49
F	4.08***	2.9***
r <sup>2</sup>	0.61	0.51
CD test	1.7*	1.51

**Fuente:** Elaboración propia.

**Nota:** \*, \*\*, \*\*\* corresponden a una significatividad del 10, 5 y 1 % respectivamente.

**Desvío estandar** entre paréntesis.

Los resultados se presentan en la columna A y muestran que el coeficiente estimado, que mide el efecto de largo plazo de la tasa de inversión (variable INV-GDP-PWT-LP) sobre la tasa de crecimiento del producto per cápita de un país, es significativo, positivo y asume un valor de 0.13. Este resultado sugiere que una mejora en la ratio inversión producto en un año incrementa la tasa de crecimiento de un país en el largo plazo. Por su parte, se tiene que el coeficiente velocidad de ajuste es de  $-0.88$ , lo que

implica que el 88% del desequilibrio de corto plazo se ajusta en el primer periodo.

La columna B de la Tabla 4 muestra que, utilizando una medida alternativa del ratio inversión producto (variable INV-GDP-FMI-LP), los resultados generales se mantienen. El coeficiente de largo plazo estimado asume un valor de 0.11 y la velocidad de ajuste de los desequilibrios de corto plazo indica que el 87% del desequilibrio se ajusta en un período.

Estos resultados son consistentes con lo planteado por Levine and Renelt (1992) y Bond et al. (2010), pero no con los encontrados por otros trabajos, como por ejemplo Jones (1995).

Los resultados también destacan que la inversión tiene efectos positivos y significativos sobre la tasa de variación del producto aún en el corto plazo. El coeficiente estimado (0.45) para el modelo A indica que cambios en la tasa de inversión (variable D.INV-GDP-PWT-CP) tiene un impacto positivo y significativo sobre el crecimiento del producto. Valor similar ocurre con el coeficiente estimado (0.46) en el modelo B (variable D.INV-GDP-PWT-CP)

Finalmente, y como lo destacan diversos trabajos empíricos, los resultados deben tomarse con cautela, dado que los mismos pueden ser sensibles a la inclusión de más variables explicativas.

También se advierte que los coeficientes pueden diferir entre países o grupos de países, lo cual sugiere que se debe profundizar el estudio en la relación entre estas dos variables.

## 6 Conclusiones

Las estimaciones econométricas realizadas en este trabajo respaldarían la idea que la tasa de inversión de un país afecta a su tasa de crecimiento del producto de largo plazo.

Utilizando datos para 141 países desarrollados y no desarrollados en el período 1970-2019, se encuentra que existe una relación de corto y largo plazo entre la tasa de inversión y la tasa de crecimiento del producto per cápita, lo cuál es consistente con los modelos de crecimiento AK. El análisis sugiere que las economías tienden a una tasa de crecimiento de largo plazo que depende de cambios en las tasas de ahorro o inversión. Esto significa que mientras más invierte una economía en capital físico o humano, mayor será su tasa de crecimiento económico a largo plazo.

Sin embargo, existe una gran heterogeneidad entre países, por lo que estos resultados no pueden generalizarse. Así, por ejemplo, el trabajo de Jones (1995) desafía esta visión, sugiriendo que los aumentos en la inversión no garantizan un crecimiento sostenido a largo plazo. En cambio, factores exógenos como el progreso tecnológico parecen ser más determinantes para el crecimiento económico en el largo plazo, lo que sugiere que los modelos de crecimiento endógeno, como el AK, pueden no capturar completamente la realidad observada.

Los resultados también encuentran que la inversión puede tener un impacto positivo en el crecimiento económico a corto plazo. La relación entre inversión y el crecimiento

económico es compleja y depende de múltiples factores, como el entorno institucional, las políticas macroeconómicas, etc. Asimismo, la relación puede no ser lineal ni uniforme entre países. Diferentes tipos de inversión (capital físico, humano, tecnología) pueden tener efectos diferentes, y su efectividad puede variar según el contexto económico y el nivel de desarrollo de los países.

## References

- Aghion, P. and Howitt, P. (1992). A model of growth through creative destruction. *Econometrica*, 60:323.
- Barro, R. J. (1990). Government spending in a simple model of endogeneous growth. *Journal of Political Economy*, 98(5, Part 2):S103–S125.
- Bond, S., Leblebicioglu, A., and Schiantarelli, F. (2010). Capital accumulation and growth: a new look at the empirical evidence. *Journal of Applied Econometrics*, 25(7):1073–1099.
- Cass, D. (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *Review of Economic Studies*, 32(3):233–240.
- Chudik, A. and Pesaran, M. H. (2015). Common correlated effects estimation of heterogeneous dynamic panel data models with weakly exogenous regressors. *Journal of Econometrics*, 188:393–420.
- Diamond, P. A. (1965). National debt in a neoclassical growth model. *The American Economic Review*, 55(5):1126–1150.
- Ditzen, J. (2018). Estimating dynamic common-correlated effects in stata. *The Stata Journal: Promoting communications on statistics and Stata*, 18:585–617.
- Ditzen, J. (2021). Estimating long-run effects and the exponent of cross-sectional dependence: An update to xtdcce2. *The Stata Journal: Promoting communications on statistics and Stata*, 21:687–707.
- Feenstra, R. C., Inklaar, R., and Timmer, M. P. (2015). The next generation of the penn world table. *American Economic Review*, 105:3150–3182.
- Grossman, G. M. and Helpman, E. (1991a). *Innovation and Growth in the Global Economy*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Grossman, G. M. and Helpman, E. (1991b). Quality ladders in the theory of growth. *The Review of Economic Studies*, 58:43.
- Heijdra, B. J. (2017). *Foundations of Modern Macroeconomics: Exercise and Solutions Manual, Third Edition*. Oxford University Press.

- Im, K. S., Pesaran, M., and Shin, Y. (2003). Testing for unit roots in heterogeneous panels. *Journal of Econometrics*, 115:53–74.
- Jones, C. I. (1995). Time series tests of endogenous growth models. *The Quarterly Journal of Economics*, 110:495–525.
- Kao, C. (1999). Spurious regression and residual-based tests for cointegration in panel data. *Journal of Econometrics*, 90:1–44.
- Koopmans, T. C. (1965). On the concept of optimal economic growth, in (study week on the) econometric approach to development planning, chap. 4.
- Koopmans, T. C. (1967). Intertemporal distribution and ‘optimal’ aggregate economic growth.
- Levine, R. and Renelt, D. (1992). A Sensitivity Analysis of Cross-Country Growth Regressions. *American Economic Review*, 82(4):942–963.
- Lucas, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22(1):3–42.
- Pedroni, P. (1999). Critical values for cointegration tests in heterogeneous panels with multiple regressors. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61:653–670.
- Pedroni, P. (2004). Panel cointegration: asymptotic and finite sample properties of pooled time series tests with an application to the ppp hypothesis. *Econometric Theory*, 20.
- Pesaran, M. and Smith, R. (1995). Estimating long-run relationships from dynamic heterogeneous panels. *Journal of Econometrics*, 68:79–113.
- Pesaran, M. H., Shin, Y., and Smith, R. P. (1999). Pooled mean group estimation of dynamic heterogeneous panels. *Journal of the American Statistical Association*, 94:621–634.
- Pesaran, M. H. and Yamagata, T. (2008). Testing slope homogeneity in large panels. *Journal of Econometrics*, 142:50–93.
- Ramsey, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 38(152):543.
- Rebelo, S. (1991). Long-run policy analysis and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 99(3):500–521.
- Romer, P. M. (1987). Growth based on increasing returns due to specialization. *The American Economic Review*, 77(2):56–62.
- Romer, P. M. (1990). Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, 98(5, Part 2):S71–S102.

- Rosen, S. (1976). A theory of life earnings. *Journal of Political Economy*, 84(4):S45–S67.
- Saint-Paul, G. (1992). Fiscal policy in an endogenous growth model. *The Quarterly Journal of Economics*, 107:1243–1259.
- Samuelson, P. A. (1958). An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. *Journal of Political Economy*, 66(6):467–467.
- Shin, Y., Yu, B., and Greenwood-Nimmo, M. (2014). Modelling asymmetric cointegration and dynamic multipliers in a nonlinear ardl framework. *Festschrift in Honor of Peter Schmidt*, pages 281–314.
- Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70:65.
- Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32:334–361.
- Uzawa, H. (1965). Optimal technical change in an aggregative model of economic growth. *International Economic Review*.
- Westerlund, J. (2005). New simple tests for panel cointegration. *Econometric Reviews*, 24:297–316.
- Xiao, Y., Amaglobeli, D., and Matsumoto, R. (2021). Imf investment and capital stock dataset (icsd) 2021: Manual & faq-estimating public, private, and ppp capital stocks. mimeo.

**Tabla A.1**  
**VARIABLES UTILIZADAS Y FUENTES DE DATOS**

Variable	Definición	Fuente
rgdpo	Output-side real GDP at chained PPPs (in mil. 2017US\$)	PWT 10.0
pop	Population (in millions)	PWT 10.0
rnna	Capital stock at constant 2017 national prices (in mil. 2017US\$)	PWT 10.0
igov_rppp	General government investment (gross fixed capital formation), in billions of constant 2017 international dollars.	FMI
ipriv_rppp	Private investment (gross fixed capital formation), in billions of constant 2017 international dollars.	FMI
GDP_rppp	Gross domestic product, in billions of constant 2017 international dollars.	FMI

**Fuente: Elaboración propia.**